NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien Examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI,
DUPORCQ ET BOURLET.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XIX.

(LXXVIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[B12d]

NOTE SUR LE DÉPLACEMENT INFINIMENT PETIT D'UN TRIÈDRE ATTACHÉ A UNE COURBE;

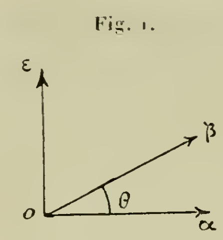
PAR M. LEVEUGLE,
Lieutenant-Colonel du Génie.

La présente Note a pour but de faire connaître des formules qui sont peut-être nouvelles et qui sont relatives aux variations infinitésimales des arêtes d'un trièdre dit *caractéristique* dont le sommet se déplace sur une courbe tracée sur une surface. J'ai été conduit à ces formules en décembre 1914, alors que j'étais en captivité en Allemagne et que, privé de tout livre à ma portée, car j'ignorais alors presque totalement la langue allemande, je cherchais, pour me distraire, à rétablir de mémoire la théorie des quaternions que j'avais étudiée quelque temps avant la guerre dans les *Éléments* de Hamilton. Revenu de captivité depuis quelques mois, je pense que ces formules, qui ont l'avantage, comme celles de Frenet, de ne contenir que des éléments caractéristiques de la courbe et de la surface sur laquelle elle est tracée, peuvent présenter

quelque intérêt et c'est ce qui m'engage à publier cette Note.

1. Je rappellerai d'abord quelques notations et résultats élémentaires du Calcul des quaternions. Soient α, β deux vecteurs *unitaires* (c'est-à-dire de longueur unité). Nous désignons par θ l'angle plus petit que π que font entre elles les directions positives de α et β. Soit alors ε un vecteur unité perpendiculaire au plan de α et β et dont le sens est tel que par

Fig. 1.



rapport à un observateur dont les pieds sont posés sur le plan $(\alpha\beta)$ et dont la tête est en ε, le sens de rotation de α vers β soit *positif* (c'est-à-dire en sens inverse des aiguilles d'une montre); on aura

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos\theta + \varepsilon \sin\theta. \tag{1}$$

On sait de plus que l'on a, quels que soient les vecteurs α, β, γ, l'identité

$$\frac{\beta}{\gamma}\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{2}$$

Nous désignons avec Hamilton par S, V, T les caractéristiques du scalar, du vecteur et du module.

Nous rappelons que si l'on considère une courbe quelconque, et si l'on prend l'*arc* s de cette courbe

comme variable indépendante, on a en désignant par ρ' le vecteur

$$\rho' = \frac{d\rho}{ds},$$

qui est dirigé suivant la tangente à la courbe,

$$T\rho' = 1,$$

c'est-à-dire que ρ' est un *vecteur unité*.

D'autre part, le vecteur γ du centre du cercle osculateur a pour valeur

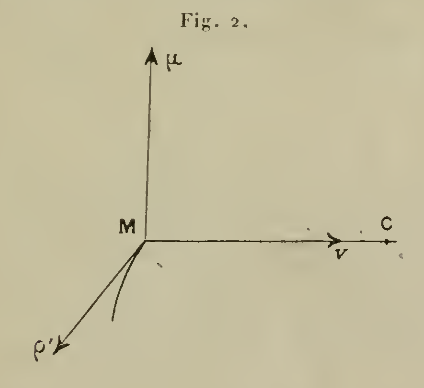
$$\gamma = \rho - \frac{1}{\rho''}$$

et le rayon de courbure r est

$$r = \frac{1}{T\rho''}.$$

2. *Trièdre normal. Formules de Frenet.* — Soient M un point d'une courbe, C le centre de cour-

Fig. 2.



bure et ρ' le vecteur unité suivant la tangente. Nous désignons par ν un vecteur unité dirigé de M vers le centre de courbure, et par μ un vecteur unité perpendiculaire à ρ' et ν et dans une direction telle que le

trièdre $\rho'\nu\mu$ soit *positif*. Nous appellerons, pour abréger, le vecteur ν, *normale principale* et le vecteur μ, *binormale*.

Soient θ l'*angle de contingence*, c'est-à-dire l'angle des deux tangentes infiniment voisines, et τ l'*angle de torsion*, c'est-à-dire l'angle de deux binormales infiniment voisines.

Soit ds l'arc infiniment petit de la courbe (variable indépendante). Supposons que le point M se déplace infiniment peu sur la courbe dans le sens ds. On a

$$ds = r\theta.$$

Le trièdre $\rho'\nu\mu$, que nous appelons *trièdre normal*, se déplace infiniment peu. Cherchons à déterminer les variations infiniment petites $d\rho'$, $d\nu$, $d\mu$.

On a d'abord

$$d\rho' = \rho'' \, ds = \mathrm{T}\rho''.\nu \, ds = \frac{ds}{r}\nu = \theta\nu.$$

On a ensuite (en supprimant ici le signe V)

$$\mu = \rho'\nu;$$

d'où

$$d\mu = \mathrm{V}\, d\rho'\nu + \mathrm{V}\rho' \, d\nu.$$

Le premier terme est nul puisque $d\rho'$ est parallèle à ν. Donc $d\mu$ est perpendiculaire à ρ'. Mais μ étant unitaire, on sait que $d\mu$ est aussi perpendiculaire à μ ([1]). Donc $d\mu$ est parallèle à $\mathrm{V}\rho'\mu$, c'est-à-dire à ν. D'autre part, d'après la définition de τ, le module de $d\mu$ est $\pm\tau$, et il est clair qu'il faut prendre

$$d\mu = -\tau\nu.$$

([1]) Car de l'équation $\mu^2 = -1$ on déduit, par différentiation, $\mathrm{S}\mu \, d\mu = 0$.

On a ensuite

$$\nu = \mu\rho';$$

d'où

$$d\nu = \mathrm{V}\,\mu\,d\rho' + \mathrm{V}\,d\mu\,\rho',$$

ou bien, en remplaçant $d\rho'$ et $d\mu$ par leurs valeurs,

$$d\nu = -\,\theta\rho' + \tau\mu.$$

On a donc les formules très importantes (*formules de Frenet*)

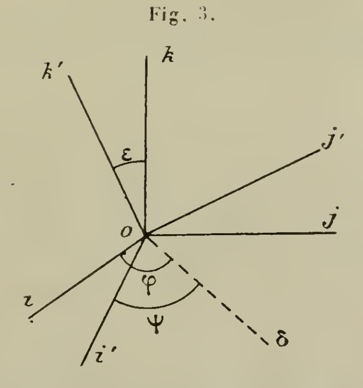
(F) $\begin{cases} d\rho' = \theta\nu & \text{(variation de la tangente),} \\ d\nu = -\,\theta\rho' + \tau\mu & \text{(variation de la normale principale).} \\ d\mu = -\,\tau\nu & \text{(variation de la binormale).} \end{cases}$

On connaît tout le parti que l'on tire de ces formules pour l'étude des courbes gauches.

Nous allons prendre maintenant un problème plus général.

3. *Déplacement infinitésimal général d'un trièdre.* — Considérons un trièdre trirectangle i, j, k

Fig. 3.



qui se déplace infiniment peu en tournant autour de son sommet O.

Soit $i'j'k'$ la position infiniment voisine du trièdre. Nous définissons cette nouvelle position au moyen des angles d'Euler. Soit pour cela δ un vecteur unité dirigé suivant l'intersection des deux plans infiniment voisins iOj, $i'Oj'$. Nous supposons que δ est pris du même côté que j par rapport à i. Désignons par φ et ψ les angles de i et i' avec δ et par ε l'angle infiniment petit de k et k'. Les angles φ et ψ sont en général finis, mais leur différence est infiniment petite.

Nous allons exprimer $i'j'k'$ en fonction de ijk et des angles φ, ψ, ε. On a (2)

$$\frac{i'}{i} = \frac{i'}{\delta}\,\frac{\delta}{i}.$$

Mais on a (1)

$$\frac{i'}{\delta} = \cos\psi - k' \sin\psi,$$

$$\frac{\delta}{i} = \cos\varphi + k \sin\varphi.$$

Exprimons d'abord k'. On a

$$k' = \delta^{\varepsilon} k = (1 + \varepsilon\delta) k,$$

car ε est infiniment petit et l'on peut poser

$$\cos\varepsilon = 1, \qquad \sin\varepsilon = \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\delta = k^{\varphi} i = (\cos\varphi + k \sin\varphi)\, i = i \cos\varphi + j \sin\varphi,$$

et, par suite,

$$k' = k + \varepsilon i \sin\varphi - \varepsilon j \cos\varphi.$$

D'où

$$\begin{aligned} i' &= [\cos\psi - (k + \varepsilon i \sin\varphi - \varepsilon j \cos\varphi) \sin\psi] \\ &\quad \times (\cos\varphi + k \sin\varphi)\, i \\ &= (\cos\psi - k \sin\psi - \varepsilon i \sin\varphi \sin\psi + \varepsilon j \cos\varphi \sin\psi) \\ &\quad \times (i \cos\varphi + j \sin\varphi). \end{aligned}$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$i' = i\cos(\varphi - \psi) + j\sin(\varphi - \psi) - \varepsilon k \sin\psi.$$

On a ensuite

$$j' = k'i'.$$

D'où, en remplaçant k' et i' par leurs valeurs et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$j' = -i\sin(\varphi - \psi) + j\cos(\varphi - \psi) + \varepsilon k \cos\psi.$$

Mais la différence $\varphi - \psi$ est infiniment petite. Posons

$$\varphi - \psi = g$$

et remplaçons $\cos g$ par 1 et $\sin g$ par g, $\cos\psi$ et $\sin\psi$ par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Il vient

$$\begin{aligned} i' &= i + gj - \varepsilon k \sin\varphi, \\ j' &= -gi + j + \varepsilon k \cos\varphi, \\ k' &= \varepsilon i \sin\varphi - \varepsilon j \cos\varphi + k. \end{aligned}$$

Ou bien en posant

$$i' - i = di, \qquad j' - j = dj, \qquad k' - k = dk,$$

nous obtenons les *formules générales*

$$\begin{aligned} di &= gj - \varepsilon k \sin\varphi, \\ dj &= -gi + \varepsilon k \cos\varphi, \\ dk &= \varepsilon i \sin\varphi - \varepsilon j \cos\varphi. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que les formules de Frenet n'en sont qu'un cas très particulier. On a en effet, dans le cas du trièdre normal,

$$i = \rho', \qquad j = \nu, \qquad k = \mu.$$

Le plan (i, j) est le plan osculateur de la courbe, dont la caractéristique n'est autre, comme on le sait, que la tangente elle-même, de sorte que δ se confond

avec ρ' et que l'on a $\varphi = 0$. On a alors évidemment $g = \theta$ et $\varepsilon = \tau$. En portant ces valeurs dans les formules précédentes, on retrouve les formules de Frenet.

4. *Courbes tracées sur une surface. Trièdre caractéristique.* — Les avantages obtenus dans l'étude des courbes gauches par la considération du *trièdre normal* (ou trièdre de Frenet) attaché à la courbe, nous suggèrent l'idée de considérer également, dans le cas où une courbe est tracée sur une surface, le déplacement d'un trièdre mobile dont le sommet est sur la surface et dont l'une des arètes i reste en coïncidence avec la direction de la tangente à la courbe. Les deux autres arêtes seront la *normale à la surface* dont nous choisissons la direction positive vers le centre de courbure de la section normale plane de la surface suivant la tangente i, et un vecteur unité j situé *dans le plan tangent* et normal aux deux premiers, de manière que le trièdre i, j, k soit *positif* (ou à droite).

Nous appelons ce trièdre, *trièdre caractéristique* de la courbe au point considéré.

Les formules du n° 3 lui sont applicables. Nous désignerons par n le vecteur unité k. Il est facile de voir que, si l'on veut que ρ' soit encore dirigé dans le sens des s croissants, il faut changer ici le signe de ε, de sorte qu'on a les *formules fondamentales :*

$$(\mathrm{L})\qquad \left\{\begin{aligned} d\rho' &= gj + n\varepsilon\sin\varphi,\\ dj &= -g\rho' - n\varepsilon\cos\varphi,\\ dn &= -\varepsilon\rho'\sin\varphi + \varepsilon j\cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules :

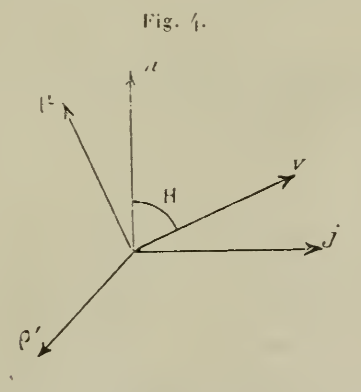
ε est l'*angle de deux normales infiniment voisines à la surface* aux points P et P' de la courbe;

φ est l'angle que fait avec Ox la caractéristique du plan tangent $\rho' O j$, c'est-à-dire l'*angle de ρ' avec sa direction conjuguée.*

Il reste à examiner la signification géométrique de g. La méthode suivante va nous fournir, en même temps que l'expression de la valeur de g (que l'on pourrait d'ailleurs obtenir par de simples considérations géométriques), deux autres relations fondamentales.

5. *Relations entre les deux trièdres.* — Ceci posé. la courbe C a au point P un trièdre normal défini par les éléments ρ', ν, μ et les scalars θ, τ. Cherchons les relations qui existent entre les éléments de ce trièdre et ceux du trièdre caractéristique.

Fig. 4.



Désignons par H l'angle du plan osculateur à la courbe avec la normale à la surface. Nous avons la transformation

$$\begin{aligned} i &= \rho', \\ \nu &= n \cos H + j \sin H, \\ \mu &= n \sin H - j \cos H. \end{aligned}$$

D'où par différentiation

$$di = d\rho',$$
$$d\nu = dn \cos H + dj \sin H + (j \cos H - n \sin H)\, dH,$$
$$d\mu = dn \sin H - dj \cos H - (n \cos H + j \sin H)\, dH.$$

Remplaçons dans ces formules dn, dj, di par leurs valeurs (L) et $d\rho'$, $d\nu$, $d\mu$ par leurs valeurs (F) où nous exprimons ρ', μ, ν par les équations de transformation précédentes. Nous obtenons trois équations linéaires en ρ', j, n dont la première ne contient pas ρ'

$$gj + n\varepsilon \sin\varphi = \theta(n \cos H + j \sin H),$$
$$(-\varepsilon\rho' \sin\varphi + \varepsilon j \cos\varphi) \sin H + (g\rho' + n\varepsilon \cos\varphi) \cos H + (n \cos H + j \sin H)\, dH = -(n \cos H + j \sin H)\tau,$$
$$(-\varepsilon\rho' \sin\varphi + \varepsilon j \cos\varphi) \cos H - (g\rho' + n\varepsilon \cos\varphi) \sin H + (j \cos H - n \sin H)\, dH = -\rho'\theta + (n \sin H - j \cos H)\tau.$$

Égalons de part et d'autre les coefficients de ρ', j, n ; nous obtenons les *huit* équations :

(*a*) $$g = \theta \sin H,$$
(*b*) $$\varepsilon \sin\varphi = \theta \cos H,$$
(*c*) $$-\varepsilon \sin\varphi \sin H + g \cos H = 0.$$
(*d*) $$\varepsilon \cos\varphi \sin H + \sin H\, dH = -\tau \sin H,$$
(*e*) $$\varepsilon \cos\varphi \cos H + \cos H\, dH = -\tau \cos H,$$
(*f*) $$+\varepsilon \sin\varphi \cos H + g \sin H = \theta,$$
(*g*) $$\varepsilon \cos\varphi \cos H + \cos H\, dH = -\tau \cos H,$$
(*h*) $$-\varepsilon \cos\varphi \sin H - \sin H\, dH = \tau \sin H.$$

Or il est clair que (*c*) est une conséquence de (1) et (2) de même que (*f*). D'autre part les équations (*d*), (*e*), (*g*), (*h*) sont identiques.

On a donc finalement, comme cela devrait être,

trois équations seulement :

$$(\mathrm{M})\qquad \left\{\begin{aligned} g &= \theta \sin \mathrm{H},\\ \varepsilon \sin \varphi &= \theta \cos \mathrm{H},\\ -\varepsilon \cos \varphi &= \tau - d\mathrm{H}, \end{aligned}\right.$$

dont la simplicité est remarquable.

La première de ces équations donne l'expression de g. Elle montre que g n'est autre chose que *la projection de l'angle de contingence* θ *sur le plan tangent*. On sait que cette grandeur s'appelle *angle de contingence géodésique de la courbe*.

Les éléments qui entrent dans les formules (L) sont ainsi parfaitement définis. On voit que ces formules dépendent des éléments essentiels suivants relatifs à la surface sur laquelle elle est tracée :

1° L'angle ε de deux normales infiniment voisines à la surface;

2° L'angle de contingence géodésique de la courbe;

3° L'angle φ de la tangente à la courbe avec la direction conjuguée.

On peut prévoir que leur importance sera analogue à celle des formules (F) pour l'étude de ces courbes.

La deuxième et la troisième (M) expriment deux théorèmes remarquables.

6. *Invariants en un point relativement à la tangente.* — Divisons chacune des deux dernières équations (M) par l'élément ds de la courbe. On a

$$\frac{\varepsilon}{ds}\sin\varphi = \frac{\theta}{ds}\cos\mathrm{H},$$

$$-\frac{\varepsilon}{ds}\cos\varphi = \frac{\tau}{ds} + \frac{d\mathrm{H}}{ds}.$$

Soit alors $d\varphi$ une direction fixe tangente à la surface, et considérons toutes les sections faites dans la surface par des plans passant par cette direction. On voit que $\frac{\varepsilon}{ds}$ et φ restent invariables. Mais $\frac{\theta}{ds}$ est alors la courbure de la section plane, au point considéré, et $\frac{\tau}{ds}$ est sa torsion. On a donc

$$\frac{\cos \mathrm{H}}{r} = \text{const.},$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{d\mathrm{H}}{ds} = \text{const.},$$

où r_1 est la grandeur que l'on appelle *rayon de torsion*.

La première de ces équations exprime le *théorème* connu *de Meusnier*.

La seconde exprime un *théorème* dû à *Ossian Bonnet*.

Je crois que les formules (L), maniées par des mains plus expertes que les miennes, peuvent avoir de très nombreuses et très intéressantes conséquences. Je me contenterai de quelques remarques élémentaires.

[L[1] 17a]

PROBLÈME SUR LES CONIQUES POSÉ PAR LA MÉTROPHOTOGRAPHIE ;

Par M. M. d'OCAGNE.

Le problème, dit des *cinq points*, qui consiste à repérer sur la carte la position du point de vue d'où une photographie a été prise, sur plaque verticale,

lorsqu'on a pu identifier sur la photographie cinq points marqués sur la carte, revient géométriquement à ceci :

Étant donnés cinq points A, B, C, D, D' *et deux rapports anharmoniques* ρ *et* ρ', *trouver le point commun aux deux coniques passant l'une par* A, B, C, D, *l'autre par* A, B, C, D' *et telles que ces points déterminent respectivement sur l'une et l'autre les rapports anharmoniques* ρ *et* ρ' [1].

Puisque, si M est un point variable sur la première conique, le rapport anharmonique des rayons MA, MB, MC, MD est constant et égal à ρ, il conserve cette valeur lorsque, le point M venant en coïncidence avec l'un des points A, B, C ou D, le rayon correspondant se confond avec la tangente en ce point; d'où le moyen de construire cette tangente.

Supposons que l'on ait ainsi déterminé les tangentes en A et en B aux deux coniques, ces tangentes se coupant, dans chaque couple, respectivement en T et en T'.

Le problème se trouve ainsi ramené au suivant :

Construire le quatrième point O *commun à deux coniques circonscrites au triangle* ABC, *connaissant pour chacune d'elles les tangentes en* A *et en* B *qui se coupent respectivement en* T *et en* T'.

Si les droites OA et OB coupent CB et CA respectivement en α et en β, la droite $\alpha\beta$ est la polaire du point de rencontre de AB et OC à la fois par rapport à chacune des coniques circonscrites au quadrila-

---

[1] *Voir* notre *Cours de géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 99.

tère ABCO; elle passe donc par les points T et T'. De là, la construction cherchée :

Si la droite TT' *coupe* BC *en* α *et* AC *en* β, *le point* O *se trouve à la rencontre des droites* Aα *et* Bβ.

[P¹6f]

SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. M.-F. EGAN.

Dans la question 1969 (¹), on considère le triangle OPQ ayant pour sommet le centre d'une ellipse et pour base une corde PQ de l'ellipse; on demande la position limite de l'orthocentre du triangle lorsque Q tend vers P, et le lieu du point H ainsi déterminé.

Il est clair que H est le point d'intersection de la perpendiculaire en P à OP avec la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P.

Remplaçons l'ellipse et son centre par une courbe (P) et un point O quelconques. Prenons O pour origine et soient (x, y) et (ξ, η) les points P et H. On a facilement, en désignant $dy : dx$ par y',

$$(1) \qquad \xi = \frac{(x^2+y^2)y'}{xy'-y}, \qquad \eta = -\frac{x^2+y^2}{xy'-y}.$$

Considérons en particulier le cas où la courbe (P) est unicursale, et soient

$$\frac{x}{f(t)} = \frac{y}{g(t)} = \frac{1}{h(t)}$$

(¹) *N. A.*, 1903, p. 192. Une solution a été publiée (1914, p. 282).

ses équations. Celles de la courbe (H), lieu du point H, seront alors

$$\frac{\xi}{\xi(t)} = \frac{\eta}{\eta(t)} = \frac{-1}{\zeta(t)},$$

où l'on a mis

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi(t) &= (f^2+g^2)(gh'-g'h), \\ \eta(t) &= (f^2+g^2)(hf'-h'f), \\ \zeta(t) &= \qquad h^2\ (fg'-f'g), \end{aligned} \right.$$

(H) est donc unicursale. Dans le cas où les trois polynomes $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ n'ont pas de facteur commun, l'ordre de (H) est $4n-2$, celui de (P) étant n. L'origine est pour (H) un point multiple dont les $2n$ paramètres sont données par $f^2+g^2=0$. Le polynome ξ a n racines doubles ($h=0$) et $2n-2$ autres racines données par $fg'-f'g=0$. Pour ces $3n-2$ valeurs de t il est facile de constater que l'on a $\xi:\eta=-g:f$: donc : *la courbe* (H) *touche la droite à l'infini dans les n directions perpendiculaires aux asymptotes de* (P); *elle a aussi, en général,* $2n-2$ *asymptotes perpendiculaires aux tangentes menées par* O *à* (P).

Un facteur commun aux polynomes ξ, η, ζ peut se présenter de plusieurs façons :

a. Si les déterminants

$$\left\| \begin{matrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \end{matrix} \right\|$$

ont un facteur commun d'ordre k, de la forme

$$(t-a)^\alpha (t-b)^\beta \ldots \qquad (\alpha+\beta+\ldots=k),$$

l'ordre de (H) s'abaisse de k. Il en est de même pour la classe de (P), soit m, qui sans ce facteur serait égale à $2n-2$. L'ordre de (H) est donc toujours

$2n+m$, quel que soit le nombre k. Le nombre des asymptotes de (H) se réduit aussi à m.

b. Si h contient un facteur double $(t-a)^2$, ξ, η, ζ ont le facteur commun $(t-a)$, l'ordre de (H) diminue donc par l'unité. La division par $(t-a)$ laisse le facteur $(t-a)^3$ dans ζ, donc (H) *admet la droite à l'infini comme tangente inflexionnelle, lorsque* (P) *est tangente à cette droite; le degré de* (H) *est alors* $2n+m-1$.

c. Si (P) est circulaire, il y aura un facteur commun à $f+ig$ et h, et un autre facteur commun à $f-ig$ et h, l'ordre de (H) sera donc diminué par 2.

d. Si (P) passe par O, celui-ci étant un point ordinaire sur cette courbe, f et g ont un facteur simple commun. Le polynome $fg'-f'g=f^2(g:f)'$ contient le carré de ce facteur, donc l'ordre de (H) s'abaisse par 2.

Il s'ensuit que si (P) touche la droite à l'infini en α points distincts, a en chaque point cyclique un point multiple (à tangentes distinctes) d'ordre β, enfin si l'origine est un point multiple d'ordre γ, le degré de (H) sera $2n+m-\alpha-2\beta-2\gamma$.

e. Supposons que $f+ig$ contient un facteur carré, c'est-à-dire que O est un foyer de (P). Mettons

$$f+ig=\lambda, \qquad f-ig=\mu, \qquad h=\nu.$$

les équations (2) deviennent

$$(2a) \qquad \begin{cases} \eta+i\xi=\lambda\mu(\nu\mu'-\nu'\mu), \\ \eta-i\xi=\lambda\mu(\nu\lambda'-\nu'\lambda), \\ 2i\zeta \quad =\nu^2(\mu\lambda'-\mu'\lambda). \end{cases}$$

Si λ et μ contiennent respectivement les facteurs $(t-a)^2$ et $(t-a')^2$, les trois polynomès $(2a)$ ont le

facteur commun $(t-a)(t-a')$, donc l'ordre de (H) s'abaisse par 2.

A l'aide des équations ($2a$), revenons sur le cas c où la courbe primitive (P) est circulaire. Si λ et ν ont le facteur commun $(t-a)$, les trois polynomes de ($2a$) contiennent ce facteur avec les ordres de multiplicité respectifs 1, 3, 2, ou 0, 2, 1 après la division par $t-a$. Donc, *si* (P) *est circulaire*, (H) *l'est aussi et le point* O *en est le foyer double.*

Dans les cas c, d, e, l'ordre du point multiple O sur (H) subira la même réduction que le degré de (H).

Supposons, pour donner un exemple concret, que (P) soit une conique. Si elle est une ellipse ou une hyperbole, (H) sera une courbe unicursale touchant la droite à l'infini aux points dont les directions sont perpendiculaires aux asymptotes de (P), ayant en outre deux asymptotes perpendiculaires aux tangentes à (P) issues de O. Si O est le centre, ces deux couples de points à l'infini se confondent; dans ce cas, ζ a deux racines triples et la droite à l'infini est par deux fois tangente inflexionnelle à (H).

Le degré de (H) est 6 pour une position arbitraire de O, il se réduit à 4 si O est un foyer de (P) ou un point sur (P).

Si (P) est une parabole, le degré de (H) sera 5 ou 3 suivant le cas : la droite à l'infini est une tangente inflexionnelle.

Si (P) est un cercle, (H) est une quartique circulaire ayant O pour foyer double. Elle dégénère en un cercle de centre O si O est sur la circonférence (P) et aussi dans le cas banal où O est le centre de (P).

Posons $\text{OP} = r^2$, $\text{OH} = \rho$, et soit

$$x\cos\omega + y\sin\omega = p$$

l'équation de la tangente à (P) au point P. Les coordonnées polaires de H sont ρ et ω, et l'on a facilement $\rho = r^2 : p$. Considérons en particulier le cas où (P) est un cercle de centre C et de rayon a. Prenons OC pour axe des x et soit $OC = b$, on a l'équation de (H) sous la forme

$$(3)\qquad \rho = \frac{a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega}{a + b\cos\omega},$$

qui se réduit à $\rho = 2a$ quand $b = a$, et à $\rho = a$ quand $b = 0$. Écrivons cette équation sous la forme

$$(3a)\qquad \begin{aligned} a(\rho - 2b\cos\omega) &= a^2 + b^2 - b\rho\cos\omega \\ &= a^2 + b^2 - b\,\xi. \end{aligned}$$

Cette équation nous donne un mode de génération de la quartique (H) analogue à celui d'une conique par foyer et directrice. Considérons en effet le cercle σ concentrique à (P) et passant par O. Soient S le second point de rencontre de OH avec σ, et δ la droite

$$b\,\xi = a^2 + b^2,$$

polaire par rapport au cercle (P) du point O′ symétrique de O par rapport à C. Désignons par $H\delta$ la distance perpendiculaire de H à δ, l'équation $(3a)$ nous montre que

$$HS = \frac{b}{a} H\delta.$$

Si l'on multiplie $(3a)$ par ρ, puis élève les deux membres au carré, on a l'équation cartésienne de (H)

$$a^2(\xi^2 + \eta^2 - 2b\xi)^2 = (\xi^2 + \eta^2)(b\xi - a^2 - b^2)^2,$$

soit

$$a^2\sigma^2 = b^2(\xi^2 + \eta^2)\delta^2.$$

Cette équation montre que les deux points doubles de (H) en dehors de l'origine sont les intersections du cercle σ avec la droite δ.

[O'2]

APPLICATIONS D'UNE FORMULE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

PAR M. F. BALITRAND.

En un point M d'une courbe (M) menons la tangente Mx et la normale My et prenons ces droites pour axes de coordonnées mobiles. Quand M décrit (M), une droite MM_1, inclinée sur Mx d'un angle variable θ_1, enveloppe une courbe (M_1) qu'elle touche en un point M_1.

Soient s, ρ, ε l'arc, le rayon de courbure, l'angle de contingence de (M) en M; s_1, ρ_1, ε_1 les mêmes éléments de (M_1) en M_1. Si l'on désigne le segment MM_1 par r_1, on a la formule (*N. A.*, 1915, p. 4)

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\sin\theta_1}\left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta_1\right),$$

qui peut s'écrire

$$\frac{r_1\,dr_1}{ds} = \rho_1\sin\theta_1 - r_1\cos\theta_1.$$

Le second membre représente la projection, changée de signe, du contour MM_1C_1 sur Mx. Si l'on appelle x_1 l'abscisse du centre de courbure C_1 de (M_1) en M_1, on a donc

$$x_1 = -\frac{r_1\,dr_1}{ds}.$$

Cette formule qui fournit soit la valeur de x_1, soit

l'interprétation géométrique de $\frac{dr_1}{ds}$, est susceptible de quelques applications.

I. Soit $r_1 = \text{const.}$ Alors $x_1 = 0$; ce qui montre que le centre de courbure C_1 est sur la normale en M.

II. Menons par M une seconde droite MM_2, inclinée d'un angle θ_2 sur Mx et soient r_2 et x_2 les quantités analogues à x_1 et r_1. Si $r_1 = r_2$, $x_1 = x_2$; c'est-à-dire que la droite qui joint les centres de courbure C_1 et C_2 est parallèle à la normale My. Donc :

Si les longueurs des tangentes menées d'un point M *à deux courbes* (M_1) *et* (M_2) *sont égales, la normale à* (M) *est parallèle à la droite qui joint les centres de courbure de* (M_1) *et* (M_2) *aux points de contact.* (Mannheim, *Princ. et dév. de Géom. ciném.*, p. 46.)

III. Plus généralement supposons $r_1 = K r_2$, alors $x_1 = K^2 x_2$; donc :

Si les longueurs des tangentes menées d'un point M *à deux courbes* (M_1) *et* (M_2) *sont dans un rapport constant, la normale à* (M) *divise le segment* $C_1 C_2$ *des centres de courbure de* (M_1) *et* (M_2), *en* M_1 *et* M_2, *dans le rapport constant* K^2.

Donc, si (M_1) et (M_2) sont deux cercles, le lieu du point M est un cercle, car sa normale passe par un point fixe de la droite qui joint les centres des deux cercles donnés.

IV. Au lieu de deux courbes, considérons n courbes (M_1), (M_2), ... (M_n) et supposons que les longueurs des tangentes menées de M à ces courbes soient

liées par la relation

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0.$$

Par dérivation on obtient

$$f'_{r_1} dr_1 + f'_{r_2} dr_2 + \ldots + f'_{r_n} dr_n = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{r_1} f'_{r_1} x_1 + \frac{1}{r_2} f'_{r_2} x_2 + \ldots + \frac{1}{r_n} f'_{r_n} x_n = 0.$$

On voit que si l'on affecte les centres de courbure C_1, C_2, ..., C_n de masses égales à $\frac{1}{r_1} f'_{r_1}$, $\frac{1}{r_2} f'_{r_2}$, ..., $\frac{1}{r_n} f'_{r_n}$; la normale à (M) passe par le centre de gravité de ces points.

Considérons en particulier le cas de n cercles et supposons que les longueurs des tangentes qui leur sont menées de M soient liées par

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \text{const.}$$

Le lieu de M est alors un cercle, car sa normale passe par un point fixe, le centre de gravité des centres des n cercles.

Ces cercles, et d'une façon plus générale, les courbes (M_1), (M_2), ..., (M_n), peuvent être remplacés par des points, assimilés à des cercles de rayon nul. Si par exemple on prend une ellipse, un ovale de Cassini, un ovale de Descartes, qui ont respectivement pour équations

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad r_1 r_2 = a^2, \quad ar_1 + br_2 = c,$$

on a

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{r_1}{r_2}, \qquad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{r_1^2}{r_2^2}, \qquad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{br_1}{ar_2};$$

et ces relations conduisent aux constructions connues des tangentes à ces courbes.

[K2a]

CONDITION DE CONVERGENCE DE TROIS DROITES DE SIMSON;

Par M. Paul BOULANGER.

La condition pour que les droites de Simson correspondant à trois points M, N, P du cercle circonscrit à un triangle ABC soient concourantes peut être obtenue d'une manière élémentaire.

Désignons par a, m, n, p les angles des rayons OA, OM, ON, OP avec le diamètre Ox du cercle circonscrit, qui est parallèle au côté BC du triangle.

La droite de Simson relative au point M peut être construite ainsi : on prend le symétrique M′ de M par rapport à Ox, et l'on mène la parallèle à la droite AM′ par le milieu du segment qui va de l'orthocentre H du triangle au point M. D'après cela, la figure formée par les trois droites telles que la droite $M\mu$ parallèle à AM′, construites pour les trois points M, N, P, est homothétique, par rapport au centre H, de la figure formée par les droites de Simson des points M, N, P.

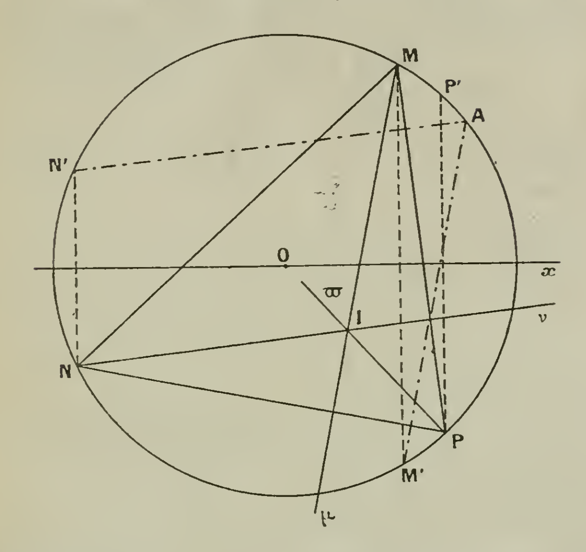
La convergence des deux systèmes de droites aura lieu simultanément.

Or pour les droites $M\mu$, $N\nu$, $P\varpi$, rattachées au triangle MNP, la convergence s'exprime par la relation

$$\frac{\sin NP\varpi}{\sin MP\varpi}\,\frac{\sin PN\nu}{\sin MN\nu}\,\frac{\sin NM\mu}{\sin PM\mu}=1.$$

L'angle $PN\nu$, par exemple, formé par NP avec $N\nu$,

ou avec la parallèle N′A, a pour mesure $\frac{1}{2}$ (arc AP — arc NN′), soit $\frac{4\pi + a - p - 2n}{2}$. La condition



précédente s'écrit donc, au groupement près des facteurs,

$$\prod \frac{\sin \frac{p + 2n - a}{2}}{\sin \frac{n + 2p - a}{2}} = 1,$$

et elle peut se mettre sous une forme très simple. Posons :

$$m + n + p - a = 2s;$$

nous aurons

$$\prod \frac{\sin\left(s + \frac{n - m}{2}\right)}{\sin\left(s + \frac{m - n}{2}\right)} = 1.$$

Soient :

$$n - p = 2\alpha, \qquad p - m = 2\beta, \qquad m - n = 2\gamma.$$

La relation établie s'écrit encore

$$\prod \sin(s-\alpha) = \prod \sin(s+\alpha)$$

ou, en développant,

$$\sin^2 s \cos s \sum \cot\beta \cot\gamma + \cos^3 s = 0.$$

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a $\sum \cot\beta \cot\gamma = 1$, et la relation se réduit à

$$\cos s = 0,$$

ou, k étant un entier quelconque,

$$m + n + p - a = 2(k+1)\pi.$$

C'est cette condition nécessaire et suffisante qu'on se proposait d'indiquer.

Les applications de la formule établie peuvent être nombreuses et sont faciles. Par exemple, considérons le triangle formé par les droites de Simson perpendiculaires aux droites concourantes fournies par les points M, N, P. On sait que ces nouvelles droites correspondent aux points M_1, N_1, P_1, diamétralement opposés aux points M, N, P; pour eux, les angles de définition sont :

$$m_1 = m + \pi, \qquad n_1 = n + \pi, \qquad p_1 = p + \pi.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$m_1 + n_1 + p_1 - a = (2k_1 + 1)\pi$$

et que les droites de Simson des points M_1, N_1, P_1 concourent.

Par conséquent, *les droites de Simson des points* M, N, P *sont les hauteurs du triangle formé par les droites de Simson perpendiculaires à celles-là.* C'est un théorème signalé par M. Vautrin dans le *Journal de Vuibert* (1918, question 8764).

SOLUTION D'UN EXERCICE PROPOSÉ AUX CANDIDATS A L'AGRÉGATION PAR LES « NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES » (1914, P. 522);

PAR M. L. LONG.

---

a, b, c, A, B, C sont six fonctions d'un même paramètre t, dont les dérivées respectives sont a', b', c', A', B', C'. L'équation

$$ax + by + c = \sin(Ax + By + C)$$

représente une famille de courbes (S).

1° *Déterminer les points d'inflexion de la courbe* (S_0) *qui correspond à une valeur particulière t_0 du paramètre t. Quels sont les lieux des points d'inflexion des courbes* (S) *quant t varie?*

Examiner le cas particulier où $\frac{a}{A'} = \frac{b}{B'} = \frac{c}{C'}$.

2° *Soit I_1 l'un des points d'inflexion et soit* (Γ_1) *le lieu de ce point I_1. Sous quelle condition la courbe* (Γ_1) *appartiendra-t-elle à l'enveloppe des courbes* (S), *le point de contact entre l'enveloppe et cette partie de l'enveloppe étant toujours un point d'inflexion I_1 de l'enveloppe* (S)?

3° *Les points d'inflexion de* (S) *étant supposés numérotés dans leur ordre de succession sur* (S), *montrer qu'ils se répartissent en deux groupes : le groupe des points de numéros pairs et le groupe des points de numéros impairs, qui jouissent chacun de la pro-*

priété suivante : si les lieux (Γ_i) *et* (Γ_j) *de deux points d'inflexion d'un même groupe appartiennent à l'enveloppe, il en est de même de tous les points d'inflexion du même groupe. Donner des expressions générales, indépendantes de tout signe de quadrature, des six fonctions* $a, \ldots, C$, *lorsque cette circonstance se produit par un groupe.*

4° Les conditions précédentes sont supposées remplies : peut-on choisir convenablement les six fonctions pour que le lieu de l'un (ou les lieux de plusieurs) des points d'inflexion de l'autre groupe appartienne (ou appartiennent) aussi à l'enveloppe?

Plus particulièrement encore, est-il possible de prendre pour les six fonctions a, b, c, A, B, C, *des expressions d'un paramètre t telles que tous les lieux des points d'inflexion de deux groupes étant supposés appartenir à l'enveloppe des courbes correspondantes (S), celles-ci soient uniquement constituées par ces différents lieux?*

1° Soit

$$ax + by + c - \sin(Ax + By + C) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe S_0. En appliquant la formule

$$(f'_x)^2 f''_{y^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_y)^2 f''_{x^2} = 0$$

qui donne les points d'inflexion, on trouve

$$(aB - bA)^2 \sin(Ax + By + C) = 0. \tag{2}$$

Les points d'inflexion sont donc définis par les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + c = 0, \\ Ax + By + C = k\pi \qquad (k \text{ étant un entier}). \end{array} \right. \tag{3}$$

De (3) on tire

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{-Cb + Bc - bk\pi}{Ab - Ba}, \\[2ex] y = \dfrac{Ca - Ac - ak\pi}{Ab - Ba}. \end{cases}$$

Quand t varie, le lieu des points d'inflexion des courbes S est représenté paramétriquement par les équations (4).

Si $\dfrac{a}{A'} = \dfrac{b}{B'} = \dfrac{c}{C'}$, la première équation (3) peut être remplacée par la suivante :

$$(3')\qquad A'x + B'y + C'z = 0$$

et dans ce cas le lieu des points d'inflexion, défini par (3') et la seconde équation (3), est l'enveloppe des droites

$$Ax + By + C = k\pi.$$

2° L'enveloppe des courbes S peut être définie par les deux équations

$$(5)\qquad \begin{cases} ax + by + c = \sin(Ax + By + C), \\ a'x + b'y + c' = (A' + B' + C')\cos(Ax + By + C), \end{cases}$$

entre lesquelles il suffirait d'éliminer t pour avoir son équation en coordonnées cartésiennes. Or les équations (3) vérifient la première équation (5); la deuxième équation (5) devient, en tenant compte de la deuxième équation (3) et de (4),

$$(6)\qquad \begin{aligned} a'[-Cb + Bc + bk\pi] + b'[Ca - Ac - ak\pi] \\ + c'(Ab - Ba) = \pm(Ab - Ba)(A' - B' + C'), \end{aligned}$$

le signe + convenant pour les valeurs paires de k et le signe — pour les valeurs impaires. Telle est la condition cherchée.

3° Soient

$$(6') \qquad \begin{aligned} & a[-Cb + Bc + 2b\pi k_1] \\ & + b[\quad Ca - Ac - 2a\pi k_1] + c(Ab - Ba) \\ & = +(Ab - Ba)(A' + B' + C') \end{aligned}$$

et

$$(6'') \qquad \begin{aligned} & a[-Cb + Bc + 2b\pi k_2] \\ & + b[\quad Ca - Ac - 2a\pi k_2] + c(Ab - Ba) \\ & = +(Ab - Ba)(A' + B' + C') \end{aligned}$$

les équations (6) relatives à deux points d'inflexion caractérisés par les coefficients *pairs* $2k_1$, $2k_2$. En retranchant (6″) de (6′), on a

$$2\pi(k_1 - k_2)(a'b - ab') = 0,$$

d'où

$$(7) \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

et, en intégrant, $a = mb$, m étant une constante. Ajoutons membre à membre (6′) et (6″) : nous obtenons l'équation suivante, en tenant compte de (7) :

$$(8) \qquad c' - c\,\frac{Ab' - Ba'}{Ab - Ba} = A' + B' + C' :$$

sous cette forme, il paraît difficile d'intégrer (8) en faisant disparaître tout signe de quadrature; mais on peut trouver des expressions générales des six fonctions $a, \ldots, C$ satisfaisant à (8).

De (7) on tire

$$\frac{a'}{a} = \frac{Ba'}{Ba} = \frac{b'}{b} = \frac{Ab'}{Ab} = \frac{Ab' - Ba'}{Ab - Ba};$$

on peut donc écrire (8) sous la forme suivante :

$$(8') \qquad c' - \frac{ca'}{a} = A' + B' + C'.$$

On voit que si l'on a

(α_1) $$c = m_1 a \, (m_1 = \text{const.})$$

on peut intégrer (8'), et l'on a ainsi

(β_1) $$c_1 = A + B + C,$$

c_1 étant une constante d'intégration.

On peut obtenir deux autres expressions α_1, β_2 en écrivant (8') sous la forme

$$c' - A' - B' - C' = c\,\frac{a'}{a};$$

on a alors, en intégrant par partie,

$$c - A - B - C + c_2 = \int c \, d \operatorname{Log} a = c \operatorname{Log} a - \int c' \operatorname{Log} a$$

(c_2 est une constante d'intégration).

Tout signe de quadrature disparaîtra si l'on prend

$$\underline{c \operatorname{Log} a = m_2} \, (m_2 = \text{const.})$$

ou

$$\underline{a^c = M} \, (\text{où } M = e^{m_2}).$$

L'expression précédente devient alors

$$\underline{A + B + C = m_2(\operatorname{Log} c - 1) + c + c_2.}$$

(8') peut encore s'écrire

$$d\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{A' + B' + C'}{a}.$$

On peut prendre alors

$$A' + B' + C' = m_3 a' \qquad \text{d'où} \qquad \underline{A + B + C = m_3 a + c_3};$$

l'expression précédente donne ensuite, par intégration,

$$\frac{c}{a} = \operatorname{Log} a + c_4.$$

4° Soit

$$(9)\qquad \begin{aligned} &a'[-Cb+Bc+b\pi(2k'+1)]\\ &+b'[\ \ Ca-Ac-a\pi(2k'+1)]+c'(Ab-Ba)\\ &=-(Ab-Ba)(A'+B'+C'); \end{aligned}$$

la condition pour que la courbe $(\Gamma_{k'})$, lieu du point d'inflexion caractérisé par le coefficient impair $2k'+1$, appartienne à l'enveloppe des courbes (S).

En tenant compte de (7), la relation (9) peut s'écrire

$$c(a'B-b'A)+c'(Ab-Ba)=-(Ab-Ba)(A'+B'+C')$$

ou

$$(8_1)\qquad c'-\frac{ca'}{a}=-(A'+B'+C'),$$

relation indépendante de k_1. Ce résultat montre que, si les six fonctions sont telles que le lieu de l'un des points d'inflexion du groupe des coefficients impairs appartienne aussi à l'enveloppe (en même temps que les lieux de tous les points d'inflexion de l'autre groupe), il en est ainsi pour *tous* les points d'inflexion des deux groupes.

On tire de (8') et de (8_1) les deux relations équivalentes

$$A'+B'+C'=0,\qquad \text{d'où}\qquad A+B+C=\text{const.}$$

et

$$\frac{c'}{c}=\frac{a'}{a}.$$

Les conditions demandées au paragraphe 4° sont donc

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c} \qquad \text{ou}\qquad a=bm=cn,\\ A+B+C=\text{const.} \end{cases}$$

Si les fonctions a, b, c, A, B, C satisfont aux rela-

tions (10), les équations (5) qui définissent l'enveloppe des courbes (S) deviennent

$$a'x + b'y + C' = 0,$$
$$Ax + By + C = k\pi,$$

et ces équations sont identiques à celles qui définissent les divers lieux des points d'inflexion des deux groupes. Il suffit donc que les conditions (10) soient satisfaites pour que l'enveloppe des courbes (S) soit uniquement constituée par les divers lieux des points d'inflexion des deux groupes.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1105.

(1872, p. 527; 1917, p. 299.)

1° *Trouver l'équation des courbes qui coupent sous un angle constant tous les segments décrits sur une même corde.*

2° *Même problème pour les hyperboles équilatères concentriques qui passent par un point fixe.*

3° *Même problème pour les ellipses homofocales.*

4° *Même problème pour les cassiniennes homofocales, c'est-à-dire les courbes telles que le produit des distances de chaque point aux n sommets d'un polygone régulier reste constant.* HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Ces diverses questions sont des applications intéressantes des coordonnées isotropes de Darboux. Je rappelle que si l'on

pose

$$u = x + iy,$$
$$v = x - iy,$$

u et v sont les coordonnées isotropes du point x, y, que si (u, v), $(a_1\ b_1)$ sont les coordonnées de deux points M et A, on a

$$e^{i\omega_1}\overline{\mathrm{AM}} = u - a_1, \qquad e^{-i\omega_1}\overline{\mathrm{AM}} = v - b_1,$$

ω_1 étant l'angle de $\overline{\mathrm{AM}}$ avec l'axe des x, et qu'enfin l'angle de deux courbes

$$\mathrm{F}(u, v) = 0, \qquad \Phi(u, v) = 0$$

est donné par l'expression

$$\frac{\dfrac{du}{dv}}{\dfrac{\partial u}{\partial v}} = e^{2i\varphi}.$$

On en déduit immédiatement que les trajectoires sous l'angle φ des courbes

$$\frac{\mathrm{F}(u)}{\Phi(v)} = \mathrm{K}_1, \qquad \mathrm{F}(u)\,\Phi(v) = \mathrm{K}_1, \qquad \mathrm{F}(u) + \Phi(v) = \mathrm{K}$$

ont respectivement pour équations :

$$e^{i\varphi}\,\mathrm{L}[\mathrm{F}(u)] - e^{i\varphi}\,\mathrm{L}[\Phi(v)] = \text{const.},$$
$$e^{i\varphi}\,\mathrm{L}[\mathrm{F}(u)] + e^{i\varphi}\,\mathrm{L}[\Phi(v)] = \text{const.},$$
$$e^{i\varphi}\,\mathrm{F}(u) \quad + e^{-i\varphi}\,\Phi(v) \quad = \text{const.}$$

1° Soient $\mathrm{A}(a_1 a'_1)$, $\mathrm{B}(b_1 b'_1)$ les extrémités de la corde, si M est un point du cercle AMB, si

$$\overline{\mathrm{AM}}.\overline{\mathrm{O}x} = \omega_1, \qquad \mathrm{A}\overline{\mathrm{BM}}.\overline{\mathrm{O}x} = \omega_2, \qquad \omega_2 - \omega_1 = \text{const.}$$

Ox coïncide avec AB), l'équation du cercle AMB sera

$$\frac{u - a_1}{u - b_1} : \frac{v - a'_1}{v - b'_1} = \text{const.}$$

Les trajectoires sous l'angle φ de ces cercles auront pour

équations

$$e^{i\varphi}\mathrm{L}\,\frac{u-a_1}{u-b_1}-e^{-i\varphi}\mathrm{L}\,\frac{v-a'_1}{v-b'_1}=\text{const.}$$

Posons, M étant un point de l'une de ces courbes,

$$\overline{\mathrm{AM}}=\rho_1,\qquad \overline{\mathrm{BM}}=\rho_2,$$

$$\text{angle}\ \widehat{\overline{\mathrm{AM}}.\overline{\mathrm{AB}}}=\theta_1,\qquad \text{angle}\ \widehat{\overline{\mathrm{BM}}.\overline{\mathrm{AB}}}=\theta_2.$$

On a

$$u-a_1=\rho_1 e^{i\theta_1},\qquad u-b_1=\rho_2 e^{i\theta_2},$$
$$v-a'_1=\rho_1 e^{-i\theta_1},\qquad v-b'_1=\rho_2 e^{-i\theta_2}.$$

L'équation des trajectoires s'écrit alors

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=e^{\frac{\mathrm{K}+(\theta_2-\theta_1)\cos\varphi}{\sin\varphi}}=\mathrm{K}'e^{(\theta_2-\theta_1)\cot\varphi}.$$

Si $\varphi=\frac{\pi}{2}$, les trajectoires orthogonales sont les cercles ayant pour diamètres les segments ayant pour extrémités deux points correspondants de l'involution ayant A et B pour points doubles. Le cas général peut d'ailleurs se traiter *géométriquement* très simplement : en effet, une inversion de centre A et de puissance $\overline{\mathrm{AB}}^2$ transforment les cercles AMB en un faisceau de droites passant par B, les trajectoires sous l'angle φ de ce faisceau sont les spirales logarithmiques de pôle B, les inverses de ces spirales sont les courbes cherchées, l'inversion étant celle qui est définie ci-dessus.

2° Soient $x^2-y^2-2\lambda xy-a^2=0$ les hyperboles équilatères considérées; en coordonnées isotropes leur équation deviendra

$$\frac{u^2+v^2-2a^2}{u^2-v^2}=\text{const.},$$

leur équation différentielle sera

$$\frac{2u\,du}{u^2-a^2}-\frac{2v\,dv}{v^2-a^2}=0,$$

et l'équation différentielle de leurs trajectoires sous l'angle φ sera

$$e^{i\varphi}\frac{2u\,\delta u}{u^2-a^2}-e^{-i\varphi}\frac{2v\,\delta v}{v^2-a^2}=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$e^{i\varphi}L(u^2 - a^2) - e^{-i\varphi}L(v^2 - a^2) = \text{const.}$$

En transformant cette équation comme plus haut et en conservant les mêmes notations, il vient

$$\rho_1\rho_2 = K e^{-(\theta_1+\theta_2)\cot\varphi}.$$

Dans le cas où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les trajectoires orthogonales sont des cassiniennes.

Il est facile de retrouver *géométriquement* ces résultats :

Étant donnée une équation en coordonnées polaires d'une courbe algébrique $f(\rho_1\omega) = 0$, on sait que la transformation qui consiste à remplacer ρ et ω dans cette équation par ρ^n et $n\omega$ conserve les angles (William Roberts). Or les hyperboles équilatères considérées ont pour équation polaire

$$\rho^2\cos 2\omega - \lambda\rho^2\sin 2\omega - a^2 = 0;$$

on peut les transformer en le faisceau de droites

$$\rho\cos\omega - \lambda\rho\sin\omega - \frac{a^2}{K} = 0$$

qui passent par un point fixe P $\left(\omega = 0, \rho = \frac{a^2}{K}\right)$. Il en résulte immédiatement que les trajectoires sous l'angle φ des hyperboles considérées seront les transformées, dans la transformation ci-dessus indiquée, de spirales logarithmiques ayant même pôle et même axe polaire. Les trajectoires orthogonales seront des transformées de cercles, c'est-à-dire des cassiniennes.

3° Si $2c$ désigne la distance focale des ellipses considérées, leur équation sera en coordonnées isotropes

$$\sqrt{(u-c)(v-c)} + \sqrt{(u+c)(v+c)} = \text{const.},$$

d'où l'on pourrait déduire immédiatement l'équation différentielle des trajectoires sous l'angle φ; cependant, dans ce cas, les variables u et v n'étant plus séparées, l'emploi des coordonnées isotropes ne présente pas grand avantage et il vaut mieux procéder comme il suit :

Soient $F(\rho_1, \rho_2) = 0$, $f(v_1, v_2) = 0$ les équations bipolaires

de deux courbes planes, rapportées à deux points fixes A et B.

Posons

$$AB = 2c, \qquad \text{angle } \overline{AM}.\overline{AB} = \theta_1, \qquad \text{angle } \overline{BM}.\overline{AB} = \theta_2.$$

M étant un point commun aux deux courbes, ces deux courbes se couperont en M sous l'angle φ si l'on a

$$\tang\varphi = \frac{[F'_{\rho_2} f'_{r_1} - F'_{\rho_1} f'_{r_2}] \sin(\theta_2 - \theta_1)}{f'_{r_1}[F'_{\rho_1} + \cos(\theta_2 - \theta_1) F'_{\rho_2}] + f'_{r_2}[F'_{\rho_2} + \cos(\theta_2 - \theta_1] F'_{\rho_1}]},$$

d'où, en supposant $F(\rho_1 \rho_2) \equiv \rho_1 + \rho_2 - K = 0$,

$$\cot\varphi \frac{f'_{r_1} - f'_{r_2}}{f'_{r_1} + f'_{r_2}} = \cot \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

ou

$$\tang \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{dr_2 - dr_1}{dr_2 + dr_1} \tang\varphi;$$

or

$$\tang \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2}}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}},$$

d'où

$$\frac{d(r_2 - r_1)}{\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2}} = \cot\varphi \frac{d(r_2 + r_1)}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}},$$

équation dont l'intégrale générale est

$$r_2 - r_1 = 2c \sin LK \left| \frac{r_1 + r_2}{2c} = \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2c}\right)^2 - 1} \right|^{\cot\varphi}.$$

4° L'équation générale des cassiniennes considérées sera

$$F(u)\Phi(v) \equiv (u - a_i)..(u - a_n)(v - a'_1)...(v - a'_n) = \text{const.}.$$

l'équation de leurs trajectoires sous l'angle φ sera par suite

$$e^{i\varphi} L(u - a_1)...(u - a_n) + e^{-i\varphi} L(v - a'_1)...(v - a'_n) = \text{const.};$$

or

$$u - a_i = \rho_i e^{i\theta_i}, \qquad v - a'_i = \rho_i e^{-i\theta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 4),$$

d'où l'équation

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n = K e^{\tang\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)}$$

qui, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, se réduit à

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = \text{const.}$$

1321.

(1879, p. 383; 1917, p. 231.)

Étant donné un ellipsoïde, on décrit la sphère qui passe par les extrémités A, B, C *de trois rayons conjugués et qui a son centre dans le plan* ABC; *trouver : 1° le lieu du centre de la sphère; 2° l'enveloppe de cette sphère.*

BARBARIN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient O le centre de l'ellipsoïde, σ la section de l'ellipsoïde par le plan A, B, C, ω le centre de cette section. Les tangentes à σ en A, B, C sont parallèles à BC, CA, AB; ω est le centre de gravité de ABC.

1° Le lieu cherché situé dans le plan ABC est donc le lieu du centre des cercles circonscrits aux triangles inscrits dans σ et ayant ω comme centre de gravité.

Si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ est l'équation de σ, et

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

l'équation du cercle ABC, et si $x = a\frac{t^2+1}{2t}$, $y = -bi\frac{t^2-1}{2t}$ représente un point de σ, le centre de gravité de ABC sera en ω, si l'on a, t_1, t_2, t_3 étant les paramètres de ABC,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 = 0,$$

d'où

$$16(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) = (a^2 - b^2)^2 \qquad \text{et} \qquad 2(a^2 + b^2) + 2\gamma = 0.$$

2° La dernière relation montre que le cercle ABC est orthogonal au cercle fixe $x^2 + y^2 + \frac{a^2+b^2}{2} = 0$, l'enveloppe de la sphère ABC est donc la cyclide

$$\left| x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a^2+b^2}{2} \right|^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{16}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0.$$

On sait d'ailleurs que le plan ABC enveloppe l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{1}{3} = 0,$$

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ étant l'ellipsoïde donné.

1471.

(1883, p. 432; 1917, p. 232.)

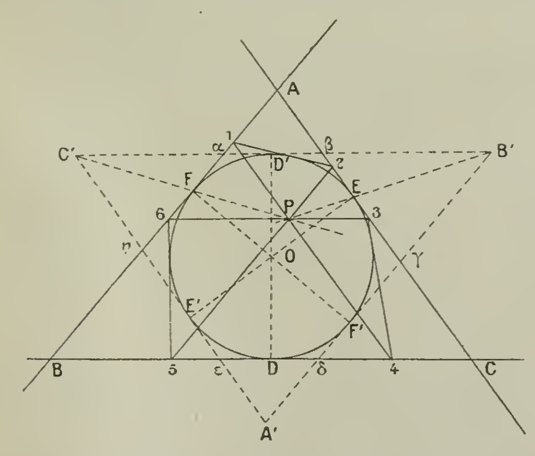
On donne dans un hexagone circonscriptible à un cercle les longueurs des trois diagonales qui unissent les sommets opposés; construire cet hexagone, sachant que ces trois diagonales sont respectivement parallèles à trois côtés de l'hexagone, deux quelconques de ces côtés n'étant pas consécutifs.

E. Lemoine.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soit 123456 l'hexagone cherché, les diagonales 14, 25, 36 se coupent au point P et sont respectivement parallèles aux



côtés 23, 16, 45; soient O le centre du cercle inscrit, ABC le triangle formé par les côtés 23, 45, 61; D, E, F les contacts des côtés du triangle ABC avec le cercle O; D′, E′, F′ les points de ce cercle diamétralement opposés à D, E, F; A′B′C′ le triangle formé par les tangentes au cercle O en D′ E′ F′.

Le lieu du point P obtenu en menant par les intersections 1

et 2 d'une tangente variable au cercle O, avec AB et AC des parallèles à AC et AB, est une conique Γ_A passant par ED et F et ayant pour asymptotes $A'C'$ et $A'B'$, Γ_A et la conique analogue Γ_B d'asymptotes $B'C'$ et $B'A'$ et passant par D et F ont pour corde commune la droite $C'FP$. Le point P de concours des droites $A'D$, $B'E$, $C'F$ est commun aux trois coniques Γ_A, Γ_B, Γ_C, c'est le point de Brianchon de l'hexagone cherché. P est évidemment le symétrique par rapport à O du point de concours P', de AD', BE', CF', ses coordonnées trilinéaires normales x, y, z par rapport à ABC sont

$$\frac{ax}{2a-p} = \frac{by}{2b-p} = \frac{cz}{2c-p},$$

ses distances δ_1, δ_2, δ_3 à BC, CA, AB sont

$$\delta_1 = \frac{2r}{a}(2a-p), \qquad \delta_2 = \frac{2r}{b}(2b-p), \qquad \delta_3 = \frac{2r}{c}(2c-p),$$

r étant le rayon OD, on en déduit, en désignant par h_1, h_2, h_3 les hauteurs de ABC issues de A, B, C et en posant

$$l = \overline{63}, \qquad m = \overline{14}, \qquad n = \overline{25},$$

$$\frac{l}{a} = \frac{ah_1 - 4ar + 2rp}{ah_1} = \frac{2(p-a)}{p} = \frac{2bc}{p^2}\cos^2\frac{A}{2},$$

d'où

$$\frac{l}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{m}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{n}{\cos^2\frac{C}{2}},$$

d'où

(1) $$\frac{l}{\overline{EF}^2} = \frac{m}{\overline{DF}^2} = \frac{n}{\overline{ED}^2};$$

on a aussi

$$\frac{l}{a} = \frac{2(h_1 - 2r)}{h_1};$$

d'où, en désignant par α, β, γ, δ, ε, η les intersections des côtés des triangles ABC, $A'B'C'$,

$$\frac{l}{\alpha\beta} = \frac{m}{\varepsilon\eta} = \frac{n}{\delta\gamma} = 2.$$

Les relations (1) permettent de construire un triangle semblable à DEF, donc une figure homothétique à la figure cherchée, d'où l'on déduira par une simple homothétie de centre O la solution du problème.

La seule condition de possibilité est que les relations (1) déterminent un triangle réel. La considération d'un des cercles exinscrits au triangle ABC conduirait à une solution tout à fait analogue.

QUESTIONS.

2384. Démontrer qu'il est impossible de mener une tangente parallèle à une direction Δ, à une cardioïde à l'aide de la règle et du compas. En déduire la construction des tangentes parallèles à l'axe polaire. J. Bouchary.

2385. Sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle équilatéral, on marque les points α_1, β_1, γ_1 et leurs isotomiques α_2, β_2, γ_2. Démontrer que les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ ont même angle de Brocard. V. Thébault.

2386. Dans un triangle ABC dont le centre de gravité est G et le centre du cercle circonscrit O, on inscrit un triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ tel que son centre de gravité G_1 soit sur la perpendiculaire à OG en G. Soit $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ l'isotomique de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Montrer que les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ ont même angle de Brocard. V. Thébault.

2387. Soient trois points α_1, β_1, γ_1 respectivement situés sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle et leurs isotomiques α_2, β_2, γ_2. Démontrer la relation d'aires :

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_1\beta_1\gamma_2 = ABC.$$

V. Thébault.

2388. Dans un quadrilatère complet, les orthopôles de chacun des côtés, pris par rapport au triangle formé par les trois autres côtés, sont quatre points collinéaires avec les orthocentres des quatre triangles obtenus en prenant les côtés trois à trois.

En déduire que, dans un triangle, l'orthopôle d'une droite appartient à la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre sur la transversale réciproque de cette droite.

R. Goormaghtigh.

2389. Si trois courbes de Cesàro d'indices n_1, n_2, n_3, de même pôle, ont un contact du deuxième ordre en un même point, leurs troisièmes rayons de courbure ρ_1, ρ_2, ρ_3 correspondant à ce point sont liés par la relation

$$\frac{(n_2-n_3)(n_1+1)^2}{(n_1-1)}\rho_1+\frac{(n_3-n_1)(n_2+1)^2}{(n_2-1)}\rho_2 \\ +\frac{(n_1-n_2)(n_3+1)^2}{(n_3-1)}\rho_3=0.$$

R. Goormaghtigh.

2390. Étudier la surface qui a pour équation

$$x^2(z-a)^2+z^2(y^2+z^2-a^2)=0,$$

les axes étant rectangulaires; droites de la surface, cercles, coniques, etc.; génération de la surface par le mouvement d'un cercle, d'une ellipse. J. Lemaire.

2391. On sait que la radiale d'une chaînette d'égale résistance est une droite; démontrer que la radiale de sa développée est une parabole. F. Balitrand.

2392. On considère les paraboles tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements H_3 et à la tangente et à la normale en un sommet S de cette courbe. Démontrer que les polaires de S par rapport à ces paraboles enveloppent le cercle décrit sur SA comme diamètre, A étant le point de rebroussement de H_3 correspondant à S. F. Balitrand.

2393. Si l'équation d'une surface en coordonnées homogènes est de la forme

$$A(x, y, z)\times\varphi^m(x, y, z)+B(x, y, z) \\ \times\varphi^{m-1}(x, y, z)t+\ldots=0,$$

de sorte que la courbe représentée par les équations $t=0$, $\varphi=0$ est une ligne de la surface dont l'ordre de multiplicité est m, l'équation du système des m plans tangents à la surface en un point de cette ligne s'obtient en remplaçant, dans l'équation de la surface, $\varphi(x, y, z)$ par $X\varphi'_x+Y\varphi'_y+Z\varphi'_z$, et t par T. G. Fontené.

[L'1]

SUR LES DROITES COUPANT UNE CONIQUE SOUS UN ANGLE DONNÉ;

PAR M. R. BOUVAIST.

Je me propose d'exposer ici très succinctement quelques-uns des résultats auxquels conduit l'étude des droites coupant une courbe ou une surface sous un angle donné, me réservant de publier plus tard une étude complète sur ce sujet.

Définitions et notations. — Considérons un cycle (C) orienté dans le sens des aiguilles d'une montre et deux droites non orientées Δ et D.

L'angle $\widehat{\Delta D}$ sera par définition la valeur commune, définie à un multiple de π près, des angles $\widehat{\Delta_1 D_1}$, $\widehat{\Delta_1 D_2}$, $\widehat{\Delta_2 D_1}$, $\widehat{\Delta_2 D_2}$, que font entre elles les semi-droites Δ_1 et D_1, Δ_1 et D_2, Δ_2 et D_1, Δ_2 et D_2, tangentes à (C) et parallèles à Δ et D.

Si angle $\widehat{\Delta D} = V$, D sera la pseudo-perpendiculaire (V) à Δ.

Si Δ est tangente à une conique (E) en M, et si D passe par M, D sera la pseudo-normale (V) en M à (E).

$\overline{OX}$ et OY sont les axes de la conique considérée (E), $\overline{Ox}$ et $\overline{Oy}$ le système de diamètres conjugués de (E), tel que angle $\widehat{\overline{Ox}.\overline{Oy}} = V$; $\overline{Ox'}$, $\overline{Oy'}$ étant le système

de diamètres conjugués symétrique du précédent par rapport à $\overline{OX}$ et $\overline{OY}$, on a évidemment

$$\text{angle } \overline{Ox'}.\overline{Oy'} = \pi - V.$$

Nous supposerons $V < \frac{\pi}{2}$.

Théorème. — *Soient* M *un point quelconque du plan,* Δ *sa polaire par rapport à* (E), *la pseudo-perpendiculaire* (V) *à* Δ *issue de* M *rencontre* Ox' *et* Oy *en* α *et* β, *on a* $\frac{M\alpha}{M\beta} = \frac{b'^2}{a'^2}$, a' *et* b' *étant les demi-diamètres de* (E) *dirigé suivant* Ox *et* Oy.

Δ coupe Ox et Oy en A et B, A′M parallèle à Oy coupe Ox en A′, Δ en I, la symétrique $A'\alpha_1$ de Ox par rapport à MA′ coupe Mαβ en α.

Les triangles $MA'\alpha_1$ et IAA′ sont semblables :

$$A'\alpha_1 \times AA' = A'I.A'M = b'^2\left(1 - \frac{\overline{OA'}^2}{a'^2}\right).$$

$\alpha_1 A''$ parallèle à Oy coupe Ox en A″,

$$A'A'' = A'\alpha_1,$$

d'où

$$A'A'' = \frac{b'^2}{OA} \qquad \text{et} \qquad OA.OA'' = a'^2 - b'^2.$$

Si donc M décrit A′M, α_1 est fixe, or si M coïncide avec I′, intersection de Ox' et A′M, Mαβ devient Ox'. α et α_1 coïncident.

On a

$$OA'.OA = a'^2,$$

d'où

$$\frac{OA''}{OA'} = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{O\alpha}{OI'}, \qquad \frac{O\alpha}{a'^2 - b'^2} = \frac{OI'}{a'^2} = \frac{\alpha I'}{b'^2};$$

$$\frac{O\alpha}{\alpha I'} = \frac{a'^2 - b'^2}{b'^2} = \frac{\alpha\beta}{M\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{M\alpha}{M\beta} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Conséquences. — Supposons que M décrive une

droite D rencontrant (E) en M_1 et M_2, nous pouvons énoncer les propriétés suivantes :

Si un point M *décrit une droite* D, *la pseudo-perpendiculaire* (V) *abaissée de* M *sur sa polaire par rapport à* (E) *enveloppe une parabole* (π_D), *inscrite dans le triangle* Ox', Oy, D.

La parabole (π_D) *touche les pseudo-normales* (V) *à* (E) *aux points* M_1 *et* M_2 *où* D *rencontre* (E), *et la pseudo-perpendiculaire à* D *au milieu* m *de* M_1M_2. *Ces pseudo-normales* $M_1\alpha_1\beta_1$, $M_2\alpha_2\beta_2$, *et la pseudo-perpendiculaire* $m\alpha'\beta'$, *rencontrent* Ox' *en* $\alpha_1\alpha_2\alpha'$, Oy *en* $\beta_1\beta_2\beta'$, α' *et* β' *sont les milieux des segments* $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$.

Les pseudo-normales $(\pi - v)$ *à* (E) *aux points* μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 *où les tangentes communes à* (π_D) *et à* (E) *touchent* (E) *concourent au pôle* P *de* D *par rapport à* (E).

La parabole qui touche Ox', Oy, *la tangente* MT *en un point* M *de* (E), *et la pseudo-normale* (V) *à* (E) *en* M, *touche la pseudo-normale au point* γ *où celle-ci touche son enveloppe. Les pseudo-perpendiculaires* (V) *abaissées d'un point quelconque* M' *de* MT, *sur* OM *et sur la polaire de* M' *par rapport à* (E) *interceptent, sur la pseudo-normale* $M\gamma$, *un segment constant et égale à* $M\gamma$.

Problème. — *Déterminer les pseudo-normales* (V) *issues d'un point* P *à une conique à centre* (E).

Les pieds M_1, M_2, M_3, M_4 de ces pseudo-normales sont à l'intersection de (E) avec la conique Γ_P, lieu des points M, tels que les pseudo-perpendiculaires (V) menées de ces points, sur leurs polaires par rapport à (E), passent par P; Γ_P a pour directions asympto-

tiques Ox' et Oy, passe par O et P si θ désigne l'angle $\overline{OX'}.\overline{OY'}$ des diamètres conjugués égaux de (E), Γ_P est une hyperbole, une parabole, ou une ellipse suivant que V est supérieur, égal ou inférieur à θ. Γ_P reste invariable si (E) varie en restant homothétique et concentrique, elle passe par les pieds des pseudo-perpendiculaires (V) abaissée de P sur les asymptotes OX_1, OY_1 de (E) et a pour centre le milieu ω du segment $u'v'$, u' et v' étant les intersections de OX' et OY' avec les pseudo-perpendiculaires (V) abaissées de P sur OY' et OX'. Ces divers résultats conduisent aux propriétés suivantes, que je me borne à énoncer sans démonstration :

Si d'un point P *d'une ellipse on abaisse, sur les diamètres conjugués égaux* OX' *et* OY', *les pseudo-perpendiculaires* (V) *dont les pieds sont* α *sur* OX', β *sur* OY', *la droite* Pm, m *étant le milieu de* $\alpha\beta$, *est la pseudo-normale* (V) *à l'ellipse en* P.

Si d'un point P *d'une hyperbole on abaisse sur les asymptotes* OX_1, OY_1 *les pseudo-perpendiculaires* (V) *dont les pieds sont* α *sur* OX_1, β *sur* OY_1, *la droite joignant* P *au pôle* φ *de* $\alpha\beta$ *par rapport au cercle* $P\alpha\beta$ *est la pseudo-normale* (V) *à l'hyperbole en* P.

Remarquons que les rayons rectangulaires du faisceau involutif, formé par les directions asymptotiques du faisceau linéaire $(E)+\lambda\Gamma_P=0$ sont les axes OX et OY de (E). On en conclut facilement que :

Si $P\alpha\alpha'$, *pseudo-perpendiculaire* (V) *à* OX, *rencontre* OX *et* OY *en* α *et* α'; *si* $P\beta\beta'$, *pseudo-perpendiculaire* (V) *à* OY, *rencontre* OY *et* OX *en* β *et* β': *si* p *est le pôle de* $\alpha'\beta'$ *par rapport à* (E), *si* α_1 *et* β_1 *sont les projections de* p *sur* OX *et* OY, *l'hyperbole*

équilatère ayant pour directions asymptotiques OX *et* OY, *passant par* α_1 *et* β_1 *et ayant pour centre l'intersection* ω *de* $\alpha\beta$ *et de* Op, *coupe* (E) *aux points* M_1, M_2, M_3, M_4 *qui sont les pieds des pseudo-normales* (V) *menées de* P *à* (E).

Réciproquement : *Si une hyperbole équilatère ayant pour directions asymptotiques les axes* OX *et* OY *de* (E) *coupe* OX *et* OY *en* α_1 *et* β_1, *si les perpendiculaires aux axes en ces points se coupent en* p, *la polaire de* p *par rapport à* (E) *rencontre* OX et OY *en* α' *et* β', *la perpendiculaire à* $\alpha'\beta'$, *issue du centre* ω *de l'hyperbole rencontre* OX *et* OY *en* α *et* β, *les droites* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ *se coupent en un point* P, *où concourent les pseudo-normales* (V), *menées à* (E) *en ses points d'intersection à l'hyperbole équilatère*.

Propositions qui, transformées par polaires réciproques, la conique directrice étant (E), conduisent à la suivante :

Si M_1, M_2, M_3, M_4 *sont les pieds des pseudo-normales* (V) *issues d'un point* P *à une conique* (E), *les tangentes à* (E) *en* M_1, M_2, M_3, M_4, *touchent une conique* (ε) *tangentes aux axes de* (E). *Cette conique* (ε) *demeure invariable, si l'on remplace* (E) *par une conique quelconque homofocale à* (E).

Si par l'un quelconque des sommets de (E) *on mène des parallèles aux tangentes à* (E) *en* M_1, M_2, M_3, M_4, *les quatre points* μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 *où ces parallèles rencontrent à nouveau* (E) *sont sur un même cercle*.

Étant donnée l'une des cordes communes M_1, M_2

à (E) et Γ_p, proposons-nous de déterminer la seconde corde commune correspondante $M_3 M_4$:

$M_1 M_2$ rencontre Ox' en α, Oy en β, $M_3 M_4$ rencontre Ox' en α', Oy en β'; l'involution déterminée sur Ox' et Oy par les coniques $(E) + \lambda \Gamma_p = 0$ donne $O\alpha . O\alpha' = -a'^2$, $O\beta . O\beta' = -b'^2$; le pôle μ_{12} de $M_1 M_2$ par rapport à (E) se projette sur Ox' parallèlement à Oy' en α_1 sur Oy parallèlement à Ox en β_1, et l'on a $O\alpha . O\alpha_1 = a'^2$, $O\beta . O\beta_1 = b'^2$. $M_3 M_4$ est donc la symétrique, par rapport à O, de $\alpha_1 \beta_1$. Si M'_4 est la symétrique de M_4 par rapport à O, les droites $M_1 M_2$, $M_3 M'_4$ sont également inclinées sur les axes de (E).

Si P décrit la pseudo-normale (V) à (E) en M_4, les côtés du triangle $M_1 M_2 M_3$ enveloppent une parabole (π_p), tangente à Ox' et Oy et ayant pour foyer le pied f de la pseudo-perpendiculaire (V) abaissée de O sur la tangente à (E) en M'_4. La pseudo-normale (V) à (E) en M'_4 rencontre Ox' en R, Oy en S; le point P' qui se projette en R parallèlement à Oy', en S parallèlement à Ox, est le point de concours des pseudo-normales $(\pi - V)$ à (E), aux points de contact sur (E) des tangentes communes à (E) et (π_p). Les points P et P' sont visiblement isogonaux par rapport au triangle $\mu_{12} \mu_{13} \mu_{23}$, formé par les pôles par rapport à (E) de $M_1 M_2$, $M_1 M_3$, $M_2 M_3$. Donc :

Si M_1, M_2, M_3, M_4 *sont les pieds des pseudo-normales* (V) *menées d'un point* P *à une conique* (E); *si* M'_4 *est le symétrique de* M_4 *par rapport au centre* O *de* (E), *si* f *est le pied de la pseudo-perpendiculaire* (V) *abaissée de* O *sur la tangente à* (E) *en* M'_4, *si la pseudo-normale* (V) *à* (E) *en* M'_4 *coupe* Ox' *en* R, Oy *en* S, *les parallèles à* Oy' *menées par* R, *à* Ox *menée par* S *se coupent en* P', *les points* M_1, M_2, M_3,

f, M'_4, les pieds des pseudo-perpendiculaires ($\pi - V$) *abaissées de* P' *sur les tangentes à* (E) *en* M_1, M_2, M_3 *sont sur un cercle* J_V, *dont le centre* Ω *est sur la perpendiculaire élevée au milieu de* PP'. *Si le point* P *décrit la pseudo-normale* (V) *à* (E) *en* M_4, *les côtés du triangle* $M_1M_2M_3$ *enveloppent une parabole tangente à* Ox' *et* Oy *et ayant pour foyer* f. *Le centre du cercle circonscrit au triangle* $M_1M_2M_3$, *l'orthocentre et le centre de gravité du triangle décrivent des droites.*

On voit du reste que si M_1, M_2, M_3 sont les points d'intersection de (E) avec un cercle variable passant par f et M'_4, les côtés du triangle $M_1M_2M_3$ enveloppent une parabole de foyer f, tangente à Ox' et Oy. Donc :

Si f est le pied de la pseudo-perdendiculaire (V) *abaissée du centre* O *de* (E) *sur la tangente à cette conique en* M'_4, *un cercle variable passant par* M'_4 *et* f, *coupe* (E) *en* M_1, M_2, M_3; *les pseudo-normales* (V) à (E) *en* M_1, M_2, M_3 *concourent en un point* P *de la pseudo-normale* (V) *à* (E) *au point* M_4 *symétrique de* M'_4 *par rapport à* O.

Soit P_1 le point où la pseudo-normale (V) à (E) en M_4 rencontre à nouveau la conique ; f est le pôle de M'_4P_1, par rapport à (E), et les pseudo-normales (V) à (E) aux points d'intersection de la conique et de la polaire de P' par rapport à (E) se coupent en P. Of et OP' sont symétriques par rapport à l'axe focal de (E) et l'on a $Of.OP' = c^2$, c étant la demi-distance focale de (E). D'où les propositions suivantes :

Par un point M'_4 *d'une conique* (E) *de centre* O *et par le pied* f *de la pseudo-perpendiculaire* (V) *abaissée de* O *sur la tangente* M'_4f *à* (E), *on peut*

faire passer quatre cercles qui touchent (E) *en* W_1, W_2, W_3, W_4. *Ces quatre points* W_1, W_2, W_3, W_4 *sont sur une hyperbole équilatère de centre* M'_4 *ayant pour directions asymptotiques les axes* OX *et* OY *de* (E). *Les pseudo-normales* $(\pi - V)$ *à* (E) *en* W_1, W_2, W_3, W_4, *concourent au point* P', *tel que* O*f* *et* OP' *soient symétriques par rapport à l'axe focal de* (E) *et que l'on ait* $Of.OP' = c^2$.

La pseudo-normale (V) *en un point* M_4 *de* (E) *touche son enveloppe en* P_1 *et la coupe en* P_1, P_2, P_3, P_4; *les tangentes à cette enveloppe en* P_1, P_2, P_3, P_4; *sont les pseudo-normales* (V) *à* (E) *en* W_1, W_2, W_3, W_4, *les pseudo-normales* $(\pi - V)$ *à* (E) *en ces points concourent au point* P'.

Nous allons supposer maintenant que le point P se confonde avec le point M_4 et qu'il décrive la conique (E), des considérations géométriques simples montrent que :

Le cercle J_V *passant par les pieds* M_1, M_2, M_3 *des pseudo-normales* (V) *menées à une conique* (E) *par un point* P *de cette courbe, reste orthogonal à un cercle fixe concentrique à* (E) *et ayant pour rayon* $-(a^2 + b^2)$, *a et b étant les demi-axes de* (E). *Il enveloppe quand* P *varie sur* (E) *une spirique.*

Si μ_{12}, μ_{13}, μ_{23} *sont les pôles des côtés du triangle* $M_1M_2M_3$ *par rapport à* (E), *le cercle* μ_{12}, μ_{13}, μ_{23} *passe par le centre* O *de* (E).

La tangente à (E) *au point* P' *diamétralement opposé à* P *sur* (E) *et les côtés du triangle* μ_{12}, μ_{13}, μ_{23} *sont tangents à une parabole de foyer* O.

Les pseudo-normales (V) *à* (E) *en* M_1, M_2, M_3 *rencontrent* Ox', *en* m_1, m_2, m_3 : *si par* P *on mène les vecteurs* Pm'_1, Pm'_2, Pm'_3 *équipollents à* m_1M_1,

m_2M_2, m_3M_3, les points m'_1, m'_2, m'_3 sont sur un cercle tangent à (E) *en* P.

J'arrête ici cette étude, croyant avoir été assez loin pour montrer comment des considérations géométriques simples permettent de généraliser et d'énoncer sous leur véritable forme les propriétés classiques des normales aux coniques. Je n'ai parlé que des coniques à centre, et encore j'ai laissé de côté le cas où l'angle donné V est égal à l'angle des diamètres conjugués égaux de la conique donnée (cas où, comme nous l'avons vu, la conique Γ_P est une parabole), il m'a semblé inutile d'insister davantage, car le principe de continuité de Poncelet montre immédiatement comment il faut modifier nos énoncés, lorsqu'il s'agit de ce cas particulier, où des pseudo-normales (V) sont menées d'un point à une *parabole*.

[M⁵e]

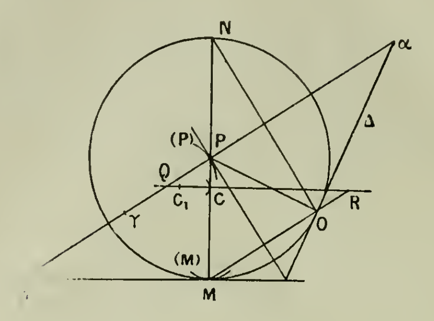
SUR LES SPIRALES SINUSOÏDES OSCULANTES;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Le nombre de spirales sinusoïdes d'indice donné n étant simplement infini, une telle courbe oscule une courbe donnée (M) en un point M lorsqu'elle a avec celle-ci un contact quartiponctuel en M; alors les deux premiers centres de courbure C et C_1 coïncident pour les deux courbes.

Désignons par O le pôle de la spirale sinusoïde (S) d'indice n osculant la courbe (M) en M, et soit N le point de MC déterminé par la relation $\overline{CN} = n\,\overline{MC}$;

d'après une propriété bien connue des spirales sinusoïdes, le point N appartient à la perpendiculaire



élevée en O sur le rayon vecteur de (S) en M. Si P est le milieu de MN, on a

(1) $$CP : PM = (1 - n) : (1 + n),$$

et par conséquent

(2) $$\overline{CM} : \overline{CP} = 2 : (1 - n).$$

La relation (1) montre que le lieu (P) du point P est la développée intermédiaire d'indice $(1 - n) : (1 + n)$ de la courbe donnée (M). Soit Q le point où la normale en P à la courbe (P) rencontre CC_1 ; on sait que, le rapport $\overline{MP} : \overline{CP}$ étant constant, le rapport des segments que Q détermine sur CC_1 est égal au rapport des segments que P détermine sur MC ([1]). On a donc

$$\overline{C_1 Q} : \overline{QC} = (1 - n) : (1 + n),$$

et par suite

(3) $$\overline{CQ} : \overline{CC_1} = \frac{1}{2}(n + 1).$$

([1]) *Voir* MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 20.

Si R désigne le point où la parallèle à PQ menée par M à PQ rencontre CC_1, on a

$$\overline{CQ} : \overline{CR} = \overline{CP} : \overline{CM}.$$

ou, en tenant compte des relations (2) et (3),

$$(4) \qquad \overline{CC_1} : \overline{CR} = (1 - n) : (1 + n).$$

On sait que le rayon vecteur d'un point d'une spirale sinusoïde d'indice n divise le rayon de courbure de la développée correspondant à ce point dans le rapport de $-(n+1)$ à $2n$; par conséquent, la droite MR est le rayon vecteur de (S) correspondant au point M, et le pôle O de (S) est le symétrique de M par rapport à la tangente en P à la courbe (P). Le cercle de centre P et de rayon PM touche donc l'une des branches de son enveloppe au point O. On a par suite le théorème suivant :

Le lieu des pôles des spirales sinusoïdes d'indice n qui osculent une courbe donnée est la seconde branche de l'enveloppe des cercles obtenus en dilatant les cercles osculateurs de cette courbe dans le rapport constant $\frac{1}{2}(n+1)$ *par rapport à leurs points de contact.*

La démonstration qui précède montre aussi que la tangente en P à la courbe (P) est la directrice de la courbe de Ribaucour (R) d'indice n qui oscule la courbe (M) en M. En effet, d'après la définition des courbes de Ribaucour, la relation (2) montre que P appartient à la directrice de (R); comme d'autre part la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque d'une courbe de Ribaucour sur sa directrice divise le rayon de courbure de la développée dans le rapport $-(n+1) : 2n$, on voit, d'après la relation (4), que la

tangente en P à (P) est la directrice de (R). On retrouve donc ainsi ce théorème de M. Braude [1] :

L'enveloppe des directrices des courbes de Ribaucour d'indice n qui osculent une courbe est la développée intermédiaire d'indice $(1-n):(1+n)$ *de cette courbe.*

2. Cesàro a déterminé (*Natürliche Geometrie*, p. 79, 80) les courbes telles que le lieu des foyers des paraboles osculantes soit une droite, ainsi que celles pour lesquelles les centres des hyperboles équilatères osculantes appartiennent à une droite. Le théorème concernant les spirales sinusoïdes démontré ci-dessus montre que, plus généralement, les *courbes telles que les pôles des spirales sinusoïdes d'indice n qui les osculent soient en ligne droite*, sont les courbes telles que leurs cercles osculateurs dilatés dans le rapport $\frac{1}{2}(n+1)$, par rapport à leurs points de contact, aient une tangente commune Δ; ce sont donc les courbes représentées par l'équation intrinsèque

$$(5) \qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} - 1}},$$

s et ρ désignant l'arc et le rayon de courbure. Pour $n = -\frac{1}{2}$ et $n = -2$, on retrouve les résultats obtenus par Cesàro pour les paraboles et les hyperboles équilatères osculantes.

---

(1) Voir L. Braude, *Les coordonnées intrinsèques* [*Scientia* (*Phys. Math.*, n° 34), p. 63], où cette proposition est démontrée analytiquement; le cas particulier relatif aux paraboles osculantes ($n = -2$) est mentionné par Cesàro (*Natürliche Geometrie*, p. 78).

On peut aisément déduire des considérations qui précèdent une définition connue des courbes (5). Puisque la développée de (M) est la caustique par réflexion de la courbe (P) pour des rayons incidents OP perpendiculaires à Δ, le centre de courbure γ de (P) en P est dans ce cas le symétrique de P par rapport à Q. Si α désigne le point où PQ rencontre Δ et β le symétrique de α par rapport à P, on a

$$\overline{P\gamma} : \overline{P\alpha} = 2\overline{PQ} : \overline{\beta P} = 2\overline{PC} : \overline{MP} = 2(1-n) : (1+n).$$

La courbe (5) est la seconde branche de l'enveloppe des cercles qui ont leurs centres sur une courbe de Ribaucour d'indice $2n : (1-n)$, et qui touchent la directrice de cette courbe.

3. Considérons une cycloïdale décrite par un point M d'un cercle ω de rayon r roulant sur un cercle Ω de rayon R; soient C le centre de courbure de la courbe en M, P et P' les points où MC rencontre Ω, le point P étant le point de contact des cercles ω et Ω. On a, en désignant le module de la cycloïdale par n,

$$MP = \frac{2n+1}{2(n+1)} MC, \qquad MP' = \frac{2n+1}{2n} MC,$$

et l'on est donc amené à considérer les spirales sinusoïdes osculantes d'indices,

$$\frac{2n+1}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1}, \qquad \frac{2n+1}{n} - 1 = \frac{n+1}{n}.$$

Le lieu des pôles des premières est le lieu du symétrique de M par rapport à la tangente en P à Ω, c'est-à-dire la cycloïdale de module $-n$ qui a les mêmes rebroussements que la cycloïdale considérée.

Le lieu des pôles des secondes spirales sinusoïdes est le lieu du symétrique de M par rapport à la tan-

gente en P' à Ω. Or la cycloïdale décrite par M peut encore être considérée comme une cycloïdale de module $-(n+1)$ obtenue par le roulement d'un cercle de rayon $(n+1)r$ sur Ω. Le lieu cherché est donc une cycloïdale de module $n+1$. On déduit de là ce théorème ([1]) :

Les lieux des pôles des spirales sinusoïdes d'indices $\frac{n}{n+1}$ *et* $\frac{n+1}{n}$ *qui osculent une cycloïdale de module* n *sont des cycloïdales de modules* $-n$ *et* $n+1$.

Par exemple, si $n = -\frac{1}{3}$, la cycloïdale est une hypocycloïde à trois rebroussements, et l'on considère les paraboles et les hyperboles équilatères osculantes ; on retrouve donc ces propriétés bien connues :

Le lieu des foyers des paraboles qui osculent une hypocycloïde à trois rebroussements est une épicycloïde ayant les mêmes rebroussements.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères qui osculent une hypocycloïde à trois rebroussements est une épicycloïde étoilée ayant les mêmes rebroussements.

[B2b]

SUR DES SÉRIES REMARQUABLES;

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. En intégrant par parties, on a, m étant entier et

([1]) La deuxième partie de ce théorème a été indiquée par Cesàro; voir *Natürliche Geometrie*, p. 80, où cette propriété est démontrée analytiquement.

positif,

$$\int x^m e^x\,dx = e^x[x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \ldots].$$

On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned}
C + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{1.2.(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{1.2.3.(m+4)} + \ldots \\
= \left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right] \\
\times [x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \ldots].
\end{aligned}$$

Égalons les coefficients des mêmes puissances de x, nous aurons

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\frac{1}{m+1} = 1 - \frac{m}{1.2} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} - \ldots.$$

....

$$\frac{1}{(p-1)!(m+p)} = \frac{1}{p!} - \frac{m}{(p+1)!} + \frac{m(m-1)}{(p+2)!} - \ldots$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{p}{m+p} = 1 - \frac{m}{p+1} + \frac{m(m-1)}{(p+1)(p+2)} \\
- \frac{m(m-1)(m-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots,
\end{aligned}$$

en supposant m et p des entiers positifs, et p différent de zéro.

Mais, si l'on suppose m et p quelconques, en exceptant les valeurs $p = 0$ et $m = -1$, et si la série du second membre est convergente, elle aura pour somme $\frac{p}{m+p}$. Or, la condition de convergence est

$$m + p > 0.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *m et p étant des nombres quel-*

conques, en exceptant les valeurs $p = 0$, $m = -1$, *si l'on a*

$$m + p > 0,$$

la série convergente

$$1 - \frac{m}{p+1} + \frac{m(m-1)}{(p+1)(p+2)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots$$

a pour somme $\frac{p}{m+p}$.

Faisons $m = p\alpha$, il vient

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \frac{p\alpha}{p+1} + \frac{p\alpha(p\alpha-1)}{(p+1)(p+2)} - \ldots,$$

d'où

$$1 = \left[1 - \frac{p\alpha}{p+1} + \frac{p\alpha(p\alpha-1)}{(p+1)(p+2)} - \ldots\right](1+\alpha).$$

En faisant $p = 1$, on retombe sur un résultat obtenu au commencement, où α est remplacé par m, et si, en outre, nous prenons pour α un entier positif, nous aurons une égalité numérique.

Dans la série générale, faisons $m = p$, nous aurons

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{p+1}{p} + \frac{p(p-1)}{(p+1)(p+2)} - \frac{p(p-1)(p-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots,$$

développement valable pour $p > 0$.

Dans l'égalité

$$1 - \alpha + \alpha^2 - \ldots = 1 - \frac{p\alpha}{p+1} + \ldots,$$

égalons les coefficients de α dans les deux membres, nous aurons une égalité valable si le coefficient de α, dans le second membre, est une série convergente, ce

qui a lieu pour $p > 0$; on en déduit

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1.2}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)(p+3)} + \frac{2.3}{(p+2)(p+3)(p+4)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+3} + \frac{3}{(p+3)(p+4)} + \frac{3.4}{(p+3)(p+4)(p+5)} + \ldots,$$

et ainsi de suite.

II. Considérons une suite de quantités quelconques $a_1 a_2 \ldots a_n$ rangées dans l'ordre indiqué par les indices. Posons

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \qquad \ldots, \qquad b_n = \frac{a_n + a_1}{2},$$

$$c_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}, \qquad c_2 = \frac{b_2 + b_3}{2}, \qquad \ldots, \qquad c_n = \frac{b_n - b_1}{2},$$

et ainsi de suite, puis

$$u_1 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_n - a_1)^2,$$
$$u_2 = (b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + \ldots + (b_n - b_1)^2,$$
$$u_3 = (c_1 - c_2)^2 + (c_2 - c_3)^2 + \ldots + (c_n - c_1)^2,$$

et ainsi de suite.

La série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est convergente et a pour somme $\frac{1}{n}\Sigma(a_i - a_j)^2$.

Pour démontrer ce théorème, que j'ai énoncé et démontré dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires* de M. Niewenglowski (15 janvier 1903), je considère un système de n points, les milieux des segments obtenus en joignant ces points, deux à deux, dans un ordre déterminé, puis

les milieux des côtés du nouveau polygone ainsi formé, et ainsi de suite; le point-limite est le centre des moyennes distances des n points donnés; on envisage ensuite les carrés des distances d'un point du plan aux systèmes successifs des points obtenus: on arrive ainsi très simplement au résultat énoncé, en supposant les points en ligne droite.

Cette série est remarquable à deux points de vue :

1° Elle échappe aux règles de convergence connues;

2° La somme reste la même lorsqu'on écrit les quantités $a_1 a_2 \ldots a_n$ dans un ordre quelconque.

On peut facilement généraliser le théorème précédent en considérant, par exemple, les quantités

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \qquad b_2 = \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3}, \qquad \ldots,$$

$$c_1 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}, \qquad c_2 = \frac{b_2 + b_3 + b_4}{3}, \qquad \ldots.$$

[J2e]

SUR UN PROBLÈME DE PROBABILITÉ;

PAR M. J. HAAG.

1. Soient deux quantités indépendantes x et y, obéissant à la loi de Gauss, la valeur moyenne de chacune d'elles étant zéro. On sait que leur somme obéit aussi à la loi de Gauss, avec un écart unitaire se déduisant par combinaison quadratique des écarts unitaires de x et de y. C'est là une propriété dont on fait

fréquemment usage dans le calcul des probabilités et particulièrement dans la théorie des erreurs.

On peut se demander s'il existe une propriété analogue pour le produit xy et, si cette propriété n'existe pas, à quelle loi de probabilité obéit ce produit. Indépendamment de son intérêt pratique, cette question conduit, comme on va le voir, à des développements mathématiques intéressants et constitue un bel exemple d'application numérique de diverses théories d'analyse.

2. Appelons a et b les écarts unitaires de x et de y et cherchons :

1° *La probabilité* $d\mathrm{P}$ *pour que le produit* $z = xy$ *soit compris, en valeur absolue, entre* z *et* $z + dz$;

2° *La probabilité* P *pour que cette valeur absolue soit inférieure à* z.

Si l'on considère le point $\mathrm{M}(x, y)$, cela revient à calculer la probabilité entre les deux hyperboles voisines

$$(1) \qquad xy = z \quad \text{et} \quad xy = z + dz,$$

ainsi que la probabilité dans la région du plan extérieure à la première de ces courbes.

Faisons le changement de variables

$$(2) \qquad x = \omega a \cos\varphi, \qquad y = \omega b \sin\varphi.$$

Il faut calculer, dans chacune des régions ci-dessus, l'intégrale double

$$\frac{2}{\pi}\int\int e^{-\omega^2}\omega\, d\omega\, d\varphi.$$

Ce calcul est élémentaire et conduit, en tenant

compte des symétries, aux deux formules suivantes :

$$dP = \frac{2\,dz}{\pi ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{z}{ab \sin\varphi \cos\varphi}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi},$$

$$P = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{z}{ab \sin\varphi \cos\varphi}}\, d\varphi.$$

Posons

(3) $$\frac{2z}{ab} = t, \qquad 2\varphi = \psi ;$$

il vient

(4) $$dP = \frac{2}{\pi} Q\,dt, \qquad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{t}{\sin\psi}} \frac{d\psi}{\sin\psi};$$

(5) $$P = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{t}{\sin\psi}}\, d\psi.$$

La formule (4) se déduit d'ailleurs de la formule (5), par différentiation sous le signe $\int$.

3. Les intégrales (4) et (5) ne se ramènent pas aux fonctions élémentaires. On pourrait les calculer, pour différentes valeurs de t, par la méthode des trapèzes. Ce procédé est surtout avantageux pour P, pour les grandes valeurs de t, car l'exponentielle est, dans ce cas, très petite et l'intégrale (5) peut être évaluée, avec une précision suffisante, au moyen de quelques trapèzes seulement. Ceci correspond, du reste, au fait que P tend vers 1, pour $t = +\infty$, comme il est évident *a priori*.

Pour les petites valeurs de t, la méthode des trapèzes paraît longue et peu pratique. Nous allons en indiquer une autre, qui sera beaucoup plus propice aux calculs numériques.

4. Cherchons, si possible, une équation différentielle simple, à laquelle satisfasse la fonction Q de t.

Remarquons d'abord que cette fonction n'a de sens que si t est positif. Pour $t \leqq 0$, elle est infinie. Il est donc entendu que nous ferons varier t dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$, où t_0 désigne un nombre positif quelconque, arbitrairement petit. Dans un tel intervalle, on peut différentier Q sous le signe $\int$ autant qu'on veut.

Nous avons

$$Q' = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{t}{\sin\psi}} \frac{d\psi}{\sin^2\psi}$$

$$= \left[e^{-\frac{t}{\sin\psi}} \cot\psi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - t\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{t}{\sin\psi}} \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{\sin^3\psi};$$

$$Q' = -t\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{t}{\sin\psi}} \frac{d\psi}{\sin^3\psi} - tQ;$$

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{t}{\sin\psi}} \frac{d\psi}{\sin^3\psi};$$

$$Q' = -tQ'' - tQ.$$

Donc, la fonction Q satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(6) \qquad tQ'' + Q' - tQ = 0.$$

Au changement près de t en it, on reconnaît un cas particulier de l'*équation de Bessel*. Du reste, on sait que l'intégrale générale de cette équation peut s'exprimer par des intégrales définies, suivant la méthode de Laplace. L'intégrale (4) en est un cas particulier, comme on le voit en faisant le changement de variable

$$\frac{1}{\sin\psi} = u.$$

On trouve, en effet,

$$(7) \qquad Q = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tu}}{\sqrt{u^2-1}}\, du.$$

forme classique des intégrales auxquelles nous venons de faire allusion.

5. L'intégrale générale de l'équation de Bessel peut être développée en série au voisinage du point $t = 0$. Pour le cas particulier de l'équation (6), on sait que le développement est de la forme

$$(8) \qquad Q = CJ + C'(J \log t - I),$$

en posant

$$(9) \qquad J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{4}\right)^n}{(n!)^2}, \qquad I = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{t^2}{4}\right)^n}{(n!)^2}.$$

$$C, \ C' = \text{const.}$$

Ces séries convergent avec une grande rapidité et, par suite, se prêtent bien au calcul numérique. Il est donc intéressant pour nous de les utiliser pour l'intégrale particulière à laquelle nous avons affaire. Et pour cela, il nous suffit de *calculer les valeurs des constantes* C et C' qui conviennent à cette intégrale.

6. On a tout d'abord

$$(10) \qquad C' = \lim_{t=0} \frac{Q}{\log t}.$$

Pour calculer cette limite, qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, partons de la formule (7), en y faisant le changement de variable

$$(11) \qquad v = ut,$$

ce qui donne

$$(12) \qquad Q = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v^2 - t^2}} dv.$$

Désignant par t' un nombre positif quelconque, nous pouvons écrire

$$Q = \int_t^{t'} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v^2 - t^2}}\, dv + \int_{t'}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v^2 - t^2}}\, dv = Q_1 + Q_2.$$

Laissons fixe t' et faisons tendre t vers zéro. La seconde intégrale, qui est, comme on le voit aisément, uniformément convergente quand t varie dans tout intervalle intérieur à l'intervalle $(-t', +t')$, a pour limite

(13) $$R_2 = \int_{t'}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v}\, dv.$$

Quant à la première, elle peut s'écrire, d'après le théorème de la moyenne,

$$Q_1 = e^{-t''}\left[\log(t' + \sqrt{t'^2 - t^2}) - \log t\right],$$

t'' désignant un certain nombre compris entre t et t'. Nous avons alors

$$\frac{Q}{\log t} = -e^{-t''} + \frac{Q_2 + e^{-t''}\log(t' + \sqrt{t'^2 - t^2})}{\log t}.$$

Si, laissant t' fixe, nous faisons tendre t vers zéro, le second membre tend vers $-e^{-\theta}$, θ désignant la limite de t''. Or, cette limite est certainement comprise entre o et t', et, comme t' peut être choisi à l'avance aussi petit qu'on veut, θ ne peut être que nul. Donc, la limite de $\frac{Q}{\log t}$ est égale à -1 et l'on a

(14) $$C' = -1.$$

Nous avons maintenant

(15) $$C = \lim_{t=0}(Q + \log t).$$

Cette limite se présente sous la forme $\infty - \infty$. D'après

ce qui précède, elle est égale à

$$R_2 + \log 2t' - \lim_{t=0}(t''\log t).$$

Mais nous ne connaissons pas la limite de $t''\log t$, qui est certainement dépendante de t', puisqu'il en est ainsi de la somme $R_2 + \log 2t'$.

On peut songer à chercher la limite de cette limite, quand t' tend à son tour vers zéro. Mais il est plus simple de reprendre la question de la manière suivante.

Donnons-nous un nombre positif quelconque $k > 1$. Nous pouvons écrire

$$Q_1 = \int_t^{kt} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v^2 - t^2}}\,dv + \int_{kt}^{t'} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v^2 - t^2}}\,dv = Q_3 + Q_4.$$

Or

$$Q_3 = e^{-t'''}\log\left(k + \sqrt{k^2 - 1}\right), \qquad t < t''' < kt;$$

$$\lim_{t=0} Q_3 = \log\left(k + \sqrt{k^2 - 1}\right).$$

Puis

$$Q_4 = \int_{kt}^{t'} \frac{e^{-v} - 1}{v}\,dv + \int_{kt}^{t'} \frac{dv}{v} + \int_{kt}^{t'} e^{-v}\left[\frac{1}{\sqrt{v^2 - t^2}} - \frac{1}{v}\right]dv;$$

$$Q_4 + \log t = \log t' - \log k + \int_{kt}^{t'} \frac{e^{-v} - 1}{v}\,dv + \int_{kt}^{t'} e^{-v}\left[\frac{1}{\sqrt{v^2 - t^2}} - \frac{1}{v}\right]dv.$$

Pour $t = 0$, la première intégrale devient

$$(16) \qquad R_1 = \int_0^{t'} \frac{e^{-v} - 1}{v}\,dv.$$

La seconde s'écrit

$$e^{-t''}\left[\log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{t^2}{t'^2}}\right) - \log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}\right)\right],$$

t'' étant compris entre kt et t'. Sa limite, pour $t = 0$,

est, en appelant θ la limite de t'',

$$e^{-\theta}\left[\log 2 - \log(k + \sqrt{k^2 - 1}) + \log k\right].$$

Finalement, nous avons

$$(17)\quad \begin{aligned} C = {} & R_2 - \log(k - \sqrt{k^2-1}) + \log t' - \log k + R_1 \\ & - e^{-\theta}\left[\log 2 - \log(k - \sqrt{k^2-1}) + \log k\right]. \end{aligned}$$

où θ est un certain nombre, dont nous savons seulement qu'il est compris entre o et t'. La première ligne de (17) est indépendante de t', comme on le voit en prenant la dérivée. Il en est donc de même de la seconde et, par suite de θ. Comme θ est compris entre o et t' et qu'on peut choisir t' arbitrairement petit, on a nécessairement $\theta = 0$. Nous avons finalement

$$(18)\qquad C = R_1 + R_2 + \log 2t'.$$

7. Reste à calculer la valeur numérique de cette constante.

Nous avons d'abord

$$(19)\qquad R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t'^n}{n.n!}.$$

Cette série converge quel que soit t', mais d'autant plus vite que t' est plus petit. Pour calculer R_2, appliquons *la formule asymptotique de Stieltjes :*

$$(20)\quad R_2 = \frac{e^{-t'}}{t'}\left[1 - \frac{1}{t'} + \frac{2!}{t'^2} - \frac{3!}{t'^3} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{t'^n} + \ldots\right].$$

Cette série est divergente, quel que soit t'; néanmoins, si l'on prend la somme de ses n premiers termes, on sait que l'on obtient une valeur approchée de R_2, l'erreur commise étant inférieure en valeur absolue au dernier terme pris et de signe contraire à ce terme.

Or, si $t' \geq 2$, la série commence par converger, pour diverger ensuite. Le terme minimum est égal, si t' est entier, à $e^{-t'}\dfrac{(t'-1)!}{t'^{t'}}$.

On peut le rendre aussi petit qu'on veut, en prenant t' assez grand. Par conséquent, en arrêtant le développement à ce terme minimum, on obtient une valeur aussi approchée qu'on le veut de R_2.

Prenons $t' = 4$. Nous trouvons les deux valeurs approchées par excès et par défaut

$$0,004007 \quad \text{et} \quad 0,00358.$$

En prenant la moyenne, nous obtenons

$$R_2 = 0,00379,$$

à 0,0002 près.

En calculant ensuite R_1 par la formule (19), on trouve, à 0,0001 près,

$$R_1 = -1,96732.$$

Enfin

$$\log 8 = 2,07944.$$

Finalement, nous avons

$$C = +0,1159,$$

à environ 0,0003 près.

8. Nous connaissons maintenant le développement de Q. En intégrant la formule (4) de 0 à t, nous en déduisons

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^t Q\,dt.$$

Or

$$Q = -J\log t - I + CJ.$$

D'où

$$\frac{\pi P}{2} = -\int_0^t J\log t\,dt - \int_0^t I\,dt + C\int_0^t J\,dt.$$

Si l'on pose

$$J_1 = \int_0^t J\, dt,$$

on a

$$\int_0^t J \log t\, dt = J_1 \log t - \int_0^t J_1 \frac{dt}{t}.$$

Donc

$$P = \frac{2}{\pi}\left[J_1 (C - \log t) - \int_0^t \left(1 - \frac{J_1}{t}\right) dt\right].$$

En tenant compte des formules (9) et intégrant terme à terme, on trouve finalement

$$(21) \qquad P = \frac{2t}{\pi}[A + B(0,1159 - \log t)],$$

en posant

$$(22) \qquad A = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n, \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

$$(23) \qquad u_n = \frac{1}{2n+1} \frac{\left(\frac{t^2}{4}\right)^n}{(n!)^2}, \qquad \alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}.$$

Si l'on appelle a_n et b_n les coefficients de $\left(\frac{t^2}{4}\right)^n$ dans A et B, leurs valeurs pour les premiers termes sont les suivantes :

$a_0 = 1,\quad a_1 = \frac{4}{9} = 0.444\ldots,\quad a_2 = 0.085,\quad a_3 = 0,007842.$

$a_4 = 0.0004233,\quad a_5 = 0.00001499,\quad a_6 = 0,000000375;$

$b_0 = 1,\quad b_1 = \frac{1}{3} = 0.333\ldots,\quad b_2 = 0,05,\quad b_3 = 0,003968,$

$b_4 = 0.0001929,\quad b_5 = 0,0000631,\quad b_6 = 0.000000148.$

Ces termes sont suffisants pour calculer P jusqu'à $t = 4$.

9. Nous avons fait le calcul numérique de P au

moyen de la formule (21), pour des valeurs de t échelonnées de 0,2 en 0,2 jusqu'à $t = 2$ et de 0,4 en 0,4 jusqu'à $t = 4$. Nous avons poussé l'approximation jusqu'au $\frac{1}{1000}$.

A titre de contrôle, nous avons calculé P par les trapèzes, pour $t = 2,5$; 3 et 4. Nous avons retrouvé exactement les trois mêmes nombres que par la première méthode.

Nous avons ensuite construit une courbe, d'où nous avons déduit le Tableau ci-dessous, qui donne la loi de probabilité cherchée.

t.	P.	t.	P.
0,02......	0.060	1,9......	0,931
0,04......	0.110	2.0......	0,938
0,06......	0,151	2.1......	0,945
0,08......	0.186	2.2......	0.951
0.10......	0.218	2.3......	0,957
0.2.......	0.348	2.4......	0,962
0.3.......	0.445	2.5......	0,966
0.4.......	0.525	2,6......	0.970
0.5.......	0.590	2.7......	0.973
0,6.......	0,644	2.8......	0,975
0.7.......	0.689	2,9......	0.977
0.8.......	0.728	3,0......	0,980
0,9.......	0,762	3,1......	0.982
1.0.......	0.792	3,2......	0,983
1.1.......	0,817	3,3......	0,985
1.2.......	0,838	3.4......	0,986
1.3.......	0,857	3,5......	0,988
1.4.......	0,874	3.6......	0.989
1.5.......	0,888	3,7......	0,991
1.6.......	0.901	3,8......	0,992
1,7.......	0.912	3.9......	0,993
1.8.......	0.922	4.0......	0,994

La probabilité P a une allure très différente de la loi de Gauss, c'est-à-dire de la fonction Θ.

Elle est égale à 0,5 pour $t = 0,363$. On peut comparer la valeur correspondante de z, qui joue le rôle d'*écart médian*, au produit des écarts médians α et β de x et de y. On a

$$t = \frac{2z}{ab} = \frac{2z}{\alpha\beta}\overline{0,4769}^2 = \frac{z}{\alpha\beta} \times 0,4548.$$

Pour $t = 0,363$, on trouve $z = \alpha\beta \times 0,798$. Donc, l'écart médian en z est à peu près les $\frac{8}{10}$ du produit des écarts médians en x, y. Mais, tandis que, dans la loi de Gauss, la probabilité augmente rapidement au delà de 0,5, elle augmente beaucoup plus lentement avec la loi actuelle. Par exemple, si z est égal à 4 écarts médians, la probabilité P est seulement de 0,882, au lieu de 0,993 avec la loi de Gauss. Par contre, pour les petites valeurs de t, la croissance de P est plus rapide que celle de la fonction Θ. La dérivée $\frac{dP}{dt}$ est d'ailleurs infinie pour $t = 0$. Autrement dit, la courbe qui, dans le problème actuel, remplace la courbe classique dite « en chapeau de gendarme », présente une asymptote pour $t = 0$. Le sommet du chapeau est à l'infini. Toutefois, cet infini est atteint très lentement; car il est de l'ordre de $\log t$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1483.

(1883, p. 528; 1917, p. 233.)

Soient V le volume d'un tétraèdre et V_1 le volume du tétraèdre obtenu en menant par un point quelconque des

droites égales et parallèles aux plus courtes distances α, β, γ, *des arêtes opposées du tétraèdre donné : on a*

$$12\,VV_1 = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

GENTY.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Prenons comme origine O un sommet du tétraèdre donné, soient S_1, S_2, S_3 les trois autres sommets ; posons

$$OS_1 = p, \qquad OS_2 = q, \qquad OS_3 = r,$$

les coordonnées de S_1, S_2, S_3 seront

$$S_1\begin{cases} x = pa_1, \\ y = qb_1, \\ z = qc_1, \end{cases} \qquad S_2\begin{cases} x = qa_2, \\ y = qb_2, \\ z = qc_2, \end{cases} \qquad S_3\begin{cases} x = ra_3, \\ y = rb_3, \\ z = rc_3, \end{cases}$$

et l'on a

$$V = \frac{1}{6}pqr\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}pqr\Delta.$$

Si A_i, B_i, C_i désignent les mineurs de Δ correspondant à a_i, b_i, c_i, les coefficients angulaires de la perpendiculaire commune à OS_1 et S_2S_3 seront

$$\frac{qA_3 + rA_2}{\sigma_1}, \quad \frac{qA_1 - rA_3}{\sigma_1}, \quad \frac{qA_2 - rA_1}{\sigma_1},$$

$$\sigma_1 = [(qA_3 + rA_2)^2 + (qA_1 + rA_3)^2 + (qA_2 - rA_1)^2]^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$V_1 = \frac{1}{6}\frac{\alpha\beta\gamma}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\begin{vmatrix} qA_3 + rA_2 & qB_3 + rB_2 & qC_3 + rC_2 \\ pA_3 + rA_1 & pB_3 + rB_1 & pC_3 + rC_1 \\ pA_2 + qA_1 & pB_2 + qB_1 & pC_2 + qC_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\frac{\alpha\beta\gamma\Delta_1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3};$$

or

$$\Delta\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & r\Delta & q\Delta \\ r\Delta & 0 & p\Delta \\ q\Delta & p\Delta & 0 \end{vmatrix} = 2pqr\Delta^3,$$

d'où

$$18\,V_1V = p^2q^2r^2\Delta^3\frac{\alpha\beta\gamma}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3},$$

le plan mené par S_2S_3 parallèle à OS_1 a pour équation

$$(x - qa_2)(qA_3 + rA_2) + (y - qb_2)(qB_3 + rB_2) + (z - qc_2)(qC_3 + rC_2) = 0,$$

α, distance de ce plan à l'origine, est égale à $\dfrac{qr\Delta}{\sigma_1}$, d'où

$$\alpha\beta\gamma = \frac{p^2q^2r^2\Delta^3}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3},$$

d'où enfin

$$18VV_1 = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

L'énoncé est donc partiellement inexact.

1502.

1884, p. 400 ; 1917, p. 233.

On donne dans l'espace deux droites A *et* B. *Une hyperbole* H *doit avoir la droite* A *pour directrice et être un méridien d'une surface gauche de révolution contenant la droite* B. *On demande le lieu du foyer de* H *correspondant à la directrice* A. HALPHEN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ la surface gauche de révolution considérée ; soit O son centre ; B rencontre le cercle de gorge en α, le plan OA en γ ; soient P et P' les pieds sur A et B de la perpendiculaire commune à A et B, D l'intersection de A avec le plan du centre de gorge, β l'intersection de la parallèle à A menée par γ avec ce même plan.

Posons

$$PP' = d, \qquad \widehat{\beta O \alpha} = \theta, \qquad \widehat{\beta\alpha\gamma} = \varphi.$$

On a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{c}{a}, \qquad d = a - \frac{a^2\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$d = a(1 - \cos\varphi\cos\theta), \qquad PD = a\sin\theta\sin\varphi.$$

Soit F le foyer de la méridienne située dans le plan OA et

correspondant à la directrice A.

$$DF = a \cos\varphi \operatorname{tang}^2\varphi.$$

Soient P″ la projection de P′ sur le cercle de gorge, F′ la projection de F sur la perpendiculaire en D à DP″,

$$DF' = DF \sin\theta;$$

d'où

$$\frac{PD}{DF'} = \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi},$$

$$DF = \frac{d \cos\varphi \operatorname{tang}^2\varphi}{1 - \cos\varphi \cos\theta}.$$

Ces deux relations montrent que le lieu cherché est la section par le plan π mené par PP′ perpendiculaire à B, du cylindre parallèle à A ayant pour directrice l'ellipse (E) située dans le plan mené par PP′ perpendiculaire à A, et ayant pour foyer P, pour centre P′, pour demi-axe focal $\frac{d}{\cos\varphi}$, pour demi-axe non focal, $d \operatorname{tang}\varphi$.

Il en résulte immédiatement que π est un plan cyclique du cylindre et que le lieu cherché est le *cercle de centre* P′ *de rayon* $\frac{d}{\cos\varphi}$, *situé dans le plan* π.

Autre solution par M. Faucheux.

1508.

(1884, p. 428; 1917, p. 233).

On sait que les cordes d'une conique qui sont vues d'un point C *de la courbe sous un angle droit passent par un point fixe* P : *la polaire de ce point, par rapport à la conique, est une corde commune à cette courbe et au point* C *considéré comme un cercle infiniment petit.*

Cela posé, soient A *et* B *deux points quelconques de cette polaire. Par les trois points* A, B, C, *on peut faire passer trois coniques ayant un contact du second ordre avec la conique donnée aux points* L, M, N, *respectivement. Les droites* CL, CM, CN *sont normales aux côtés d'un triangle équilatéral, et il en est de même des droites qui joignent* C

aux quatrièmes points de rencontre des trois coniques osculatrices deux à deux. GENTY.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Si après avoir fait correspondre aux points A et B les points cycliques dans une transformation homographique, nous prenons l'inverse de la conique transformée par rapport au point C, la proposition à démontrer devient la suivante :

Si l'on joint le point double C *d'une cubique nodale aux trois points d'inflexion* I_1, I_2, I_3 *de cette cubique, les rapports anharmoniques des faisceaux formés par les tangentes au point double et les droites* CI_1CI_2, CI_2CI_3, CI_3CI_1 *sont égaux aux racines cubiques imaginaires de l'unité. Il en est de même pour les faisceaux formés par les tangentes au point double et les droites* CT_1CT_2, CT_2CT_3, CT_3CT_1 : T_1, T_2, T_3 *étant les sommets du triangle formé par les tangentes d'inflexion.*

Soit en effet $(x+y+z)^3 - 27xyz = 0$ l'équation canonique de la cubique, les côtés du triangle de référence sont les tangentes d'inflexion, la droite $x+y+z=0$ joint les points d'inflexion, le point $x=y=z$ est le point double, les tangentes en ce point sont

$$\begin{aligned} x - t\,y + t^2 z &= 0 \\ x + t^2 y - t\,z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad t^2 - t + 1 = 0.$$

Les rapports anharmoniques (I_1I_2), (I_2I_3), (I_3I_1) sont $\dfrac{t-2}{1-2t}$, $\dfrac{t-2}{t(1-2t)}$, t; les rapports anharmoniques (T_1T_2), (T_2T_3), (T_3T_1) sont $-\dfrac{1}{t}$, t^2, $-\dfrac{1}{t}$, valeurs qui, d'après la relation $t^2 - t + 1 = 0$, satisfont à l'énoncé.

1528.

(1883, p. 151 ; 1917, p. 235.)

Soient PA, PB, PC *les trois normales menées d'un point* P *à une parabole donnée; on considère les centres*

O, O', O'', O''' *des quatre cercles tangents aux côtés du triangle* ABC.

1° *Si le point* P *est sur la directrice, il coïncide avec l'un des points* O, O', O'', O'''. *Les trois autres sont sur la parabole lieu des sommets des angles droits normaux à la parabole donnée.*

2° *Par les points* O, O', O'', O''' *on peut faire passer trois hyperboles équilatères, telles que les normales à chacune d'elles en ces quatre points soient concourantes. Les trois points de concours* Q_1, Q_2, Q_3 *sont sur un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle* ABC *et de rayon triple, et sur les rayons de ce cercle qui passent par les centres des hyperboles correspondantes. Pour quelles positions du point* P *les trois hyperboles sont-elles réelles? L'une de ces hyperboles a son centre sur l'axe de la parabole. Si le point* Q *correspondant est sur la parabole, l'hyperbole correspondante passe par le point* P.

3° *En général, quel est le lieu du point* P *tel que l'une des hyperboles précédentes passe par ce point? Quel est le lieu du point de concours* Q, *du centre de l'hyperbole, des points* O, O', O'', O'''?

4° *Quel est le lieu des points* Q_1, Q_2, Q_3 *si le point* P *décrit une droite donnée.*

J. Hadamard.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient $y^2 - 2px = 0$ la parabole donnée; x_0, y_0 le point P, nous aurons

$$\text{BC} \equiv x t_1 \sqrt{2p} + t_1^2 y + p y_0 = 0, \quad \text{A}\left(x = t_1^2,\ y = t_1\sqrt{2p}\right),$$
$$\text{CA} \equiv x t_2 \sqrt{2p} + t_2^2 y + p y_0 = 0, \quad \text{B}\left(x = t_2^2,\ y = t_2\sqrt{2p}\right),$$
$$\text{AB} \equiv x t_3 \sqrt{2p} + t_3^2 y + p y_0 = 0, \quad \text{C}\left(x = t_3^2,\ y = t_3\sqrt{2p}\right),$$

t_1, t_2, t_3 étant racines de l'équation

$$t^3\sqrt{2p} - t\sqrt{2p}(x_0 - p) - p y_0 = 0.$$

Le triangle ABC est conjugué aux deux hyperboles équila-

tères :

$$(H_1) = 2xy + py_0 = 0,$$

$$(H_2) = x^2 - y^2 - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 = 0;$$

les points d'intersection de ces deux courbes sont les points O, O′, O″, O‴.

1° Si $x_0 = -\frac{p}{2}$, on a

$$H_1 \equiv \left(x + \frac{p}{2}\right) y_0 + x(y - y_0) = 0,$$

$$H_2 \equiv \left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x - \frac{3p}{2}\right) - y(y - y_0) = 0,$$

et les points d'intersection de H_1 et H_2 autres que P sont sur la parabole

$$\pi \equiv x^2 - \frac{3p}{2}x + yy_0 = 0$$

ou encore sur la parabole

$$\pi' \equiv \pi - H_2 \equiv y^2 - \frac{px}{2} - \frac{3p^2}{4} = 0,$$

lieu des sommets des angles droits normaux à $y^2 - 2px = 0$.

2° Soient α, β les coordonnées de Q_1, l'hyperbole d'Appollonius de ce point par rapport à l'hyperbole $\lambda H_1 + H_2 = 0$ doit faire partie du faisceau linéaire déterminé par H_1 et H_2, d'où les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &-\lambda\alpha + \beta + 2\lambda(p + x_0) + \frac{y_0}{2} = 0,\\ &\alpha + \lambda\beta + (p + x_0) - \lambda y_0 = 0,\\ &\frac{\alpha y_0}{2} + \beta(p + x_0) - py_0 + \lambda(x_0^2 - p^2) = 0;\end{aligned}\right.$$

d'où, par élimination de α et β,

$$(2)\quad \begin{aligned}&\lambda^3(x_0^2 - p^2) + \lambda^2(2x_0y_0 + py_0)\\ &+ \lambda\left[\frac{3y_0^2}{4} - 2(x_0 + p)(x_0 + 2p)\right] - (x_0y_0 + 2py_0) = 0,\end{aligned}$$

équation qui déterminera les trois hyperboles répondant à la question.

Soit ω le centre du cercle ABC, ses coordonnées sont

$$x_\omega = \frac{p + x_0}{2},$$

$$y_\omega = \frac{y_0}{4}.$$

Des deux premières relations (1) on déduit par élimination de λ

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_\omega - 2\beta y_\omega - 8(x_\omega^2 + y_\omega^2) = 0,$$

équation d'un cercle concentrique au cercle ABC et de rayon triple.

Le centre de l'hyperbole $\lambda H_1 + H_2$ est à l'intersection des droites :

$$x + \lambda y = 2x_\omega,$$
$$-\lambda x + y = 2y_\omega,$$

ou, en transportant l'origine en ω,

$$x + \lambda y = x_\omega - \lambda y_\omega,$$
$$-\lambda x + y = y_\omega + \lambda x_\omega;$$

dans les mêmes conditions les deux premières relations (1) qui déterminent α, β s'écrivent

$$-\lambda\alpha + \beta + 3(\lambda x_\omega + y_\omega) = 0,$$
$$\alpha + \lambda\beta + 3(x_\omega - \lambda y_\omega) = 0;$$

la droite ωQ_1 passe donc par le centre de $\lambda H_1 + H_2 = 0$ et l'on a en désignant par x_c, y_c les coordonnées de ce point

$$\alpha = 2(p + x_0) - 3x_c,$$
$$\beta = y_0 - 3y_c.$$

L'équation (2) peut s'écrire

$$\left|\lambda(x_0 + p) + \frac{y_0}{2}\right| \left\|\lambda^2(x_0 - p) + 3\lambda\frac{y_0}{2} - 2(x_0 + 2p)\right| = 0.$$

Les trois hyperboles

$$\lambda_i H_1 + H_2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

seront réelles si l'on a

$$9y_0^2 + 32(x_0 + 2p)(x_0 - p) > 0;$$

à la racine $\lambda = -\dfrac{y_0}{2(x_0+p)}$ correspond une hyperbole ayant pour centre

$$x_c = p + x_0,$$
$$y_c = 0;$$

le point Q correspondant a pour coordonnées

$$x = -(p + x_0),$$
$$y = y_0.$$

L'hyperbole considérée passera par le point P, si l'on a

$$(p + 2x_0)[y_0^2 + 2p(x_0 + p)] = 0,$$

c'est-à-dire P étant quelconque si le point Q est sur

$$y^2 - 2px = 0.$$

3° D'une façon générale, l'hyperbole

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 + \lambda p y_0 = 0$$

passera par P, si l'on a

$$(2x_0 + p)(\lambda y_0 - p) = 0,$$

c'est-à-dire si le point P est de

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} y^2 - 2px = 0 & \text{sur la directrice,} \\ y^2 + 2p(x + p) = 0 & \text{sur la parabole,} \\ y^2(4x - 5p) - 2p^2(x - p = 0) & \text{sur la cubique.} \end{cases}$$

2. *Lieu du point de concours* Q *et lieu des centres des hyperboles.* — Nous avons d'une façon générale

$$(\mathrm{Q})\quad \begin{cases} x_\alpha = 2(p + x_0) - 3x_c \quad \text{et} \quad x_c = \dfrac{(p + x_0) - \lambda \dfrac{y_0}{2}}{1 + \lambda^2}, \\[2ex] y_\beta = y_0 - 3y_c \quad \text{et} \quad y_e = \dfrac{(p + x_0)\lambda + \dfrac{y_0}{2}}{1 + \lambda^2}. \end{cases}$$

Les relations (1) permettant d'exprimer $p + x_0$ et y_0 en fonction d'un même paramètre et l'équation (2) donnant λ en fonction de ce même paramètre, on obtiendra sans difficulté les équations paramétriques des divers lieux; ces calculs ne présentant aucun intérêt particulier, nous ne les effectuerons pas.

3. *Lieu des points* O, O′, O″, O‴. — Ces quatre points sont à l'intersection des hyperboles

$$2xy + py_0 = 0,$$
$$x^2 - y^2 - 2(p + x_0)x + yy_0 + x_0^2 - p^2 = 0.$$

Si P décrit la directrice de $y^2 - 2px = 0$, nous savons que les lieux cherchés se composent de la directrice et de la parabole lieu des sommets des angles droits normaux à

$$y^2 - 2px = 0.$$

Si P décrit la parabole $y^2 + 2p(x + p) = 0$, nous poserons

$$y_0 = t\sqrt{2p},$$
$$x_0 + p = -t^2,$$

et nous éliminerons t entre les deux équations :

$$2xy + p\sqrt{2p}\,t = 0,$$
$$x^2 - y^2 + t\sqrt{2p}\,y + 2t^2(p + x) + t^4 = 0,$$

d'où

$$4x^4y^4 + 4x^2y^2(x + p)p^3 - 2xy^2p^5 + p^6(x^2 - y^2) = 0.$$

Si P décrit la cubique, nous poserons

$$x_0 = \frac{5pt^2 - 2p^3}{2(2t^2 - p^2)},$$
$$y_0 = t^2,$$

et l'équation du lieu s'obtiendra comme précédemment.

4° Si le point P décrit une droite donnée, nous aurons,

comme plus haut, pour les coordonnées de Q_1, Q_2, Q_3,

$$x = \frac{2(p+x_0)(2\lambda^2-1)+3\lambda y_0}{2(\lambda^2+1)},$$

$$y = \frac{y_0(2\lambda^2-1)-6(p+x_0)}{2(\lambda_2+1)},$$

λ étant déterminé par l'équation (2) et x_0, y_0 exprimés linéairement en fonction d'un paramètre.

2312.

(1917, p. 80.)

Soient C *une courbe gauche et* C_1 *la courbe qui est le lieu des centres des sphères osculatrices à* C. *Si l'on désigne par* R *le rayon de courbure en un point* M *de* C, *par* ρ *le rayon* MM_1 *de la sphère osculatrice au même point, par* R_1 *le rayon de courbure de* C_1 *au point* M_1; *on a, lorsque* R *n'est pas constant,*

(a) $$R_1 = \left(\frac{\rho\, d\rho}{dR}\right).$$

Si R *est constant, on a*

(b) $$R_1 = \rho = R.$$

R. Bricard.

Solution

Par M. G. Fontené.

Étant donnée une courbe gauche C, la courbe qui admet comme plans osculateurs les plans normaux a pour tangentes les axes des cercles osculateurs et pour points les centres des sphères osculatrices. Si O est le centre du cercle osculateur en M, on a immédiatement

(1) $$OM_1 = \frac{dR}{\eta},$$

η étant l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, et dR étant mis pour $|dR|$. On déduit d'abord de là la for-

mule connue

$$(1') \qquad \mathrm{OM}_1 = \mathrm{T}\,\frac{d\mathrm{R}}{ds},$$

T étant le rayon de torsion. Mais on en déduit aussi bien

$$(1'') \qquad \mathrm{OM}_1 = \mathrm{R}_1\,\frac{d\mathrm{R}}{ds_1},$$

puisque η est en même temps l'angle de contingence de la courbe C_1. Si M' et M'_1 sont sur les courbes C et C_1 deux points correspondants infiniment voisins des points M et M_1, et si l'on mène M'_1P perpendiculaire à MM_1, comme M'_1M' est égal à M'_1M en négligeant un infiniment petit du second ordre, on a

$$\frac{\mathrm{OM}_1}{\rho} = \frac{d\rho}{ds_1}, \qquad \mathrm{OM}_1 = \frac{\rho\,d\rho}{ds_1};$$

on a donc bien

$$\mathrm{R}_1\,d\mathrm{R} = \rho\,d\rho, \qquad \mathrm{R}_1 = \frac{\rho\,d\rho}{d\mathrm{R}}.$$

Si R est constant, OM_1 est nul. La courbe C_1 est lieu des centres de courbure pour C. Il est bien connu que, inversement, la courbe C est lieu des centres de courbure pour C_1. On a bien $R_1 = \rho = R$.

Autres solutions, par MM. R. Bouvaist, M. Faucheux, R. Goormaghtigh, J. Rose, L. Maloue et *Un Abonné*.

[M^{4}n]

SUR L'HÉLICOÏDE GAUCHE;

Par M. Maurice d'OCAGNE.

1. Dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 310), la théorie de l'hélicoïde gauche a été prise pour l'un des exemples d'application de la méthode de Mannheim, fondée sur l'emploi des principes de la Géométrie cinématique.

Nous avons précédemment fait voir (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1895, p. 114) comment un procédé plus strictement géométrique permet d'étudier les surfaces gauches à cône directeur de révolution les plus générales, dont l'hélicoïde gauche ordinaire (à noyau cylindrique de révolution) n'est qu'un cas particulier. Toutefois, les simplifications qui apparaissent quand on se borne à ce cas méritent d'être mises en évidence. C'est ce qui va être fait dans la présente Note où se rencontreront d'ailleurs quelques remarques nouvelles.

2. Soit, en projection sur un plan de section droite (perpendiculaire à l'axe) de la surface, pris comme plan horizontal, un point m de la génératrice D.

Si z est la cote, par rapport à ce plan de section droite, du point p où la génératrice D touche le noyau cylindrique de la surface, et si φ est l'inclinaison de cette génératrice sur ce plan, on a

$$pm = z \cot \varphi,$$

mule connue

$$(1') \qquad \mathrm{OM}_1 = \mathrm{T}\,\frac{d\mathrm{R}}{ds},$$

T étant le rayon de torsion. Mais on en déduit aussi bien

$$(1'') \qquad \mathrm{OM}_1 = \mathrm{R}_1\,\frac{d\mathrm{R}}{ds_1},$$

puisque η est en même temps l'angle de contingence de la courbe C_1. Si M' et M'_1 sont sur les courbes C et C_1 deux points correspondants infiniment voisins des points M et M_1, et si l'on mène $M'_1 P$ perpendiculaire à MM_1, comme $M'_1 M'$ est égal à $M'_1 M$ en négligeant un infiniment petit du second ordre, on a

$$\frac{\mathrm{OM}_1}{\rho} = \frac{d\rho}{ds_1}, \qquad \mathrm{OM}_1 = \frac{\rho\,d\rho}{ds_1};$$

on a donc bien

$$\mathrm{R}_1\,d\mathrm{R} = \rho\,d\rho, \qquad \mathrm{R}_1 = \frac{\rho\,d\rho}{d\mathrm{R}}.$$

Si R est constant, OM_1 est nul. La courbe C_1 est lieu des centres de courbure pour C. Il est bien connu que, inversement, la courbe C est lieu des centres de courbure pour C_1. On a bien $\mathrm{R}_1 = \rho = \mathrm{R}$.

Autres solutions, par MM. R. Bouvaist, M. Faucheux, R. Goormaghtigh, J. Rose, L. Maloue et *Un Abonné*.

[M^{4}n]

SUR L'HÉLICOÏDE GAUCHE;

Par M. Maurice d'OCAGNE.

1. Dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 310), la théorie de l'hélicoïde gauche a été prise pour l'un des exemples d'application de la méthode de Mannheim, fondée sur l'emploi des principes de la Géométrie cinématique.

Nous avons précédemment fait voir (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1895, p. 114) comment un procédé plus strictement géométrique permet d'étudier les surfaces gauches à cône directeur de révolution les plus générales, dont l'hélicoïde gauche ordinaire (à noyau cylindrique de révolution) n'est qu'un cas particulier. Toutefois, les simplifications qui apparaissent quand on se borne à ce cas méritent d'être mises en évidence. C'est ce qui va être fait dans la présente Note où se rencontreront d'ailleurs quelques remarques nouvelles.

2. Soit, en projection sur un plan de section droite (perpendiculaire à l'axe) de la surface, pris comme plan horizontal, un point m de la génératrice D.

Si z est la cote, par rapport à ce plan de section droite, du point p où la génératrice D touche le noyau cylindrique de la surface, et si φ est l'inclinaison de cette génératrice sur ce plan, on a

$$pm = z \cot \varphi,$$

Lors donc qu'on fait varier la génératrice D on voit que la construction de la courbe d'ombre, point par point, est la suivante : *on joint le pôle n de* D, *qui décrit le cercle polaire* (n), *au pôle fixe q; la droite nq coupe* D *au point u qui décrit la courbe d'ombre.*

Déduisons de là la normale à la courbe d'ombre. Pour cela, nous appliquerons au triangle variable npu le procédé de Mannheim (*Cours de Géométrie pure et appliquée*, t. I, p. 126) en remarquant que les côtés np et un pivotent respectivement autour des points o et q, que le côté mp a pour enveloppe le cercle (p), que les sommets n et p décrivent les cercles (n) et (p) de centre o. Si donc la normale cherchée à la courbe (u) coupe en v et w la normale op au cercle (p) et la perpendiculaire élevée à un au point q, qui elle-même rencontre en s le rayon op, on a

$$\frac{d(n)}{d(p)} = \frac{no}{po}; \qquad \frac{d(p)}{d(u)} = \frac{po}{uv}, \qquad \frac{d(u)}{d(n)} = \frac{uw}{ns},$$

d'où, par multiplication membre à membre,

$$\frac{no.uw}{uv.ns} = 1$$

ou

$$\frac{uw}{uv} = \frac{ns}{no}.$$

Mais, si l'on tire par u, à op, la parallèle $v'w'$ qui coupe oq en v' et qs en w', on a

$$\frac{ns}{no} = \frac{uw'}{uv'}.$$

Donc

$$\frac{uw'}{uv'} = \frac{uw}{uv},$$

ce qui montre que vv' est parallèle à ww', c'est-à-dire

perpendiculaire à nu. De là, la construction cherchée : *prendre le point de rencontre* v' *de la droite fixe* oq *et de la perpendiculaire élevée en* u *à* D; *mener de* v' *à* nu *la perpendiculaire* $v'v$ *qui coupe* on *en* v; uv *est la normale à la courbe d'ombre.*

Si l'hélicoïde est à plan directeur (ici confondu avec le plan horizontal), le pôle q de la courbe d'ombre reste le même, mais celui n de la génératrice D va à l'infini sur op; dès lors, le point u est le pied de la perpendiculaire abaissée de q sur D; autrement dit, la projection (u) de la courbe d'ombre devient la podaire du cercle (p) par rapport au point q. Dans ce cas, le point v' se confond avec le point q et le point v avec le pied de la perpendiculaire abaissée de q sur op; on retrouve bien ainsi la construction classique de la normale à la podaire.

4. Nous allons maintenant déterminer le centre de courbure c de la section droite répondant au point m. Pour cela, nous appliquerons le même procédé que ci-dessus au triangle npm. Les sommets de ce triangle décrivent respectivement le cercle (n), le cercle (p) et la section droite dont la normale est mn; son côté np pivote autour du point o; son côté pm reste tangent au cercle (p); l'inconnue est le point c où mn touche son enveloppe : on a

$$\frac{d(n)}{d(p)} = \frac{no}{po}, \qquad \frac{d(p)}{d(m)} = \frac{po}{mn}, \qquad \frac{d(m)}{d(n)} = \frac{mc}{nk},$$

si k est le point où on rencontre la normale à l'enveloppe de mn, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en c à mn.

De là, si l'on multiplie membre à membre,

$$\frac{no.mc}{mn.nk} = 1$$

ou

$$\frac{nk}{no} = \frac{mc}{mn}.$$

Tirons la parallèle cl à no, qui coupe mo en l. Nous avons

$$\frac{mc}{mn} = \frac{cl}{no}.$$

Il résulte de là que $cl = nk$, et, par suite, que lk est parallèle à nc. Si donc ml coupe ck en j, il vient

$$\frac{jm}{jl} = \frac{cm}{kl} = \frac{cm}{nc} = -\frac{cm}{cn}.$$

Élevons en n la perpendiculaire ng à mn; cette droite étant parallèle à cj, de même que no l'est à cl, les triangles nog et clj sont homothétiques par rapport à m, et l'on a

$$\frac{gm}{go} = \frac{jm}{jl}$$

ou, d'après l'égalité précédente,

$$\frac{gm}{go} = -\frac{cm}{cn}.$$

Si donc la droite cg coupe no en i, le triangle mno coupé par la transversale cig donne

$$\frac{cm}{cn}\,\frac{in}{io}\,\frac{go}{gm} = 1,$$

ou, en vertu de la précédente égalité.

$$\frac{in}{io} = -1,$$

ce qui montre que le point i est le milieu de on.

La construction du centre de courbure c se réduit donc à ceci : *prendre le point de rencontre g de om*

et de la perpendiculaire élevée en n à mn: la droite qui joint ce point g au milieu i de o n passe par le centre de courbure c.

Si le noyau cylindrique de l'hélicoïde se réduit à son axe, autrement dit, si la génératrice D rencontre constamment cet axe, l'hélicoïde devient une surface de vis à filet triangulaire. Dans ce cas, l'angle *mon* étant droit, le point *n* est l'extrémité de la sous-normale polaire rapportée au pôle *o*. Le lieu de cette extrémité est donc alors le cercle (*n*), ce qui caractérise une spirale d'Archimède. Telle est, en effet, comme on sait, la section droite de la surface de vis à filet triangulaire. Voyons ce que devient alors la construction du centre de courbure *c*. Faisant la figure dans cette hypothèse, on voit que le triangle *mng*, rectangle en *n*, admet *no* pour hauteur. Le centre de courbure *c* se trouve alors sur la droite joignant le sommet *g* au milieu de *i* de la hauteur issue du sommet de l'angle droit; on sait que cette droite n'est autre que la symédiane issue de *g* dans le triangle *mng*; on retrouve ainsi un résultat que nous avons obtenu jadis (*N. A.*, 1880, p. 292).

5. Étudions le lieu du centre de courbure *c* pour les points *m* distribués le long de D. Le point *c* est donné par la rencontre de deux droites issues de points alors fixes *n* et *i*, l'une joignant le point *n* au point *m* variable sur D, l'autre joignant le point *i* au point de rencontre *g* de *mo* et de la perpendiculaire élevée en *n* à *mn*.

Les deux faisceaux au moyen desquels on engendre ainsi la courbe (*c*) ne sont pas homographiques, attendu que, si à une droite *nc* ne correspond qu'une droite *ic*, en revanche, à une droite *ic* correspondent deux droites *nc*; néanmoins cette courbe est une conique; on peut le voir comme suit : elle passe par

le point n, avec lequel le point c coïncide lorsque le point m est à l'infini sur D, et ce point est évidemment simple sur la courbe; or, ce que nous venons de dire montre que, sur chaque droite issue de n, il n'existe, en dehors de n, qu'un seul point c du lieu; ce lieu est donc bien une conique.

Il est facile d'en obtenir les directions asymptotiques. En effet, le point c s'éloigne à l'infini lorsque gi est parallèle à mn; mais, en ce cas : 1° le point g est le milieu de om et, par suite, se trouve sur la parallèle δ à D, à mi-distance du point o; 2° l'angle ign est droit et le point g se trouve sur le cercle γ décrit sur on comme diamètre. Les droites joignant le point n aux points communs à la droite δ et au cercle γ font connaître les directions asymptotiques cherchées.

Pour qu'elles soient réelles et, conséquemment, pour que la conique (c) (qui a, dans tous les cas, un axe dirigé suivant on) soit une hyperbole, il faut et il suffit que la droite δ rencontre en des points réels le cercle γ, ce qui a lieu si pn est inférieur à $\frac{po}{2}$.

Lorsque n se confond avec le milieu de po, la conique (c) est une parabole. Elle est une ellipse lorsque n est plus éloigné de p que le milieu de po.

Dans l'espace, le lieu des centres de courbure c est à l'intersection du cylindre vertical T ayant pour base la conique (c) sus-définie avec le paraboloïde que nous avons appelé π_0 au n° 2. Ce cylindre et ce paraboloïde ayant en commun la verticale du pôle n de la génératrice D, le reste de leur intersection est *une cubique gauche; tel est donc le lieu cherché*.

Remarquons que, si nous pratiquons dans la surface une section normale par la tangente en m à la section droite, section que, pour abréger (nous pourrions

appeler une *section normale droite le long de* D), le théorème de Meusnier montre que le centre de courbure de cette section se projette également en c sur le plan horizontal. Le lieu de ce centre de courbure est donc à l'intersection du même cylindre Γ que ci-dessus et du paraboloïde des normales le long de D, désigné par π_1 au n° 2. Ces deux quadriques ayant encore en commun la verticale de n, on voit que *ce lieu est également constitué par une cubique gauche.*

[Pbα] [K23a]

SUR UNE HOMOGRAPHIE PARTICULIÈRE ET SON APPLICATION A LA PERSPECTIVE;

Par M. M. d'OCAGNE.

Cette homographie peut être définie comme le produit d'une homologie par une rotation d'angle quelconque autour du pôle de cette homologie.

C'est sur sa considération qu'est fondé l'ingénieux procédé de mise en perspective du colonel de la Fresnaye, auquel est consacrée la Note 2 de l'*Appendice* de notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 349).

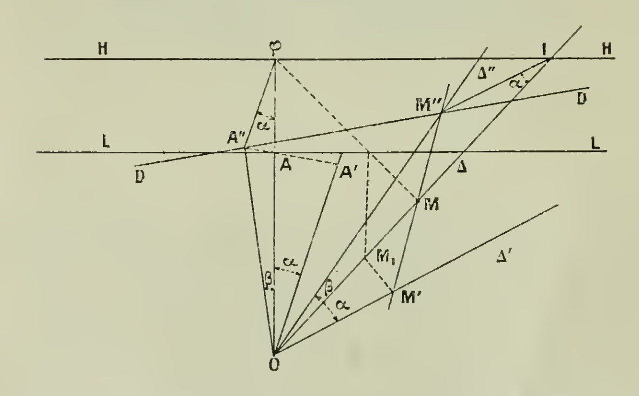
Le but de la présente Note est de faire connaître une démonstration extrêmement simplifiée d'une des propriétés fondamentales de cette homographie.

Rappelons d'abord sa définition précise: soit $[M_1]$ la figure homologique de $[M]$ pour le pôle O_1 et l'axe LL

d'homologie, et soit [M′] ce que devient [M_1] après une rotation d'angle α quelconque (rétrograde sur la figure ci-jointe) autour du pôle O_1.

Le théorème de M. de la Fesnaye consiste en ce que, *si* DD *est la droite double de l'homographie qui fait correspondre* [M′] *à* [M], *et si cette droite est coupée par la droite* MM′ *au point* M″, *l'angle* MOM″ *est constant.*

Soit β la grandeur de cet angle constant. Si cette grandeur est connue, ainsi que la droite DD, on voit comment on pourra construire le point M répondant à un point M′ donné. Faisant pivoter autour du point O le faisceau invariable que forment, avec une droite Δ, deux autres droites Δ' et Δ'' respectivement inclinées sur la première des angles α et β, , on



amène la droite Δ' à passer pas le point M′; la droite Δ'' coupe alors DD en un point M″; par M′ et M″ on fait passer le bord d'une règle qui rencontre la droite Δ au point M cherché. Moyennant l'usage de ce faisceau et de cette règle, on peut donc marquer sur le plan la position du point M sans avoir à tracer aucune ligne de construction. Or, si LL est la ligne de terre,

φ le point principal de fuite, O le point situé sur la perpendiculaire abaissée de φ sur LL, à une distance φO de ce point égale à la distance principale, [M] est la perspective de la figure géométrale rabattue de front autour de LL en $[M_1]$ et identique à [M′]. Il suffit donc de fixer cette figure géométrale (au besoin dessinée sur un transparent) dans la position [M′] pour obtenir la perspective [M] *sans lignes de construction*. Tel est l'ingénieux procédé imaginé pour la mise en perspective du géométral par le colonel de la Fresnaye et qu'il a complété, en ce qui concerne la mise en hauteur, par la remarque bien simple que voici : *si z est la hauteur d'un point à mettre en perspective sur la verticale du point* M, *lorsqu'on fait tourner le faisceau mobile autour de* O *de façon que la distance du point* M′ *à* Δ′ *devienne égale à z, la distance du point* M *à la nouvelle position de* Δ *est égale à la hauteur mise en perspective au-dessus de* M.

La démonstration de la constance de l'angle MOM″ et la détermination de la valeur de cet angle sont données, à l'endroit cité, sous une forme très simple que nous allons rappeler ici en quelques mots pour que le lecteur n'ait pas à s'y reporter :

En premier lieu, l'angle des rayons OM et OM′ étant constant (égal à α), ces rayons engendrent deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont les droites isotropes issues de O. Les droites doubles de l'homographie qui fait correspondre [M] à [M′] sont donc, outre la droite réelle DD, ces deux droites isotropes. Il en résulte, si la droite MM′ rencontre une de ces droites isotropes en K, que le rapport anharmonique (MM′M″K) est constant, donc aussi celui du faisceau O (MM′M″K), et comme les angles que font

entre eux trois de ces rayons, OM, OM′ et OK, sont constants, il en est de même de l'angle que fait le quatrième OM″ avec l'un quelconque d'entre eux.

Pour obtenir la grandeur de l'angle β, il suffit de construire un point M″ au moyen de deux couples de points M et M′ pris sur les mêmes positions de Δ et Δ'. Faisons coïncider Δ avec OA et prenons sur cette droite les points A et φ situés à sa rencontre avec LL et HH, droite conjuguée de la droite à l'infini de $[M_1]$ (ligne d'horizon dans le cas de la perspective). Le point A_1 coïncidant alors avec A, le point A′ s'obtient en faisant tourner OA de l'angle α autour de O, et le point φ_1 étant à l'infini sur OA, φ' est à l'infini sur OA′, ce qui montre que le point A″ s'obtient en faisant tourner φA de l'angle α (pris avec son sens) autour de φ; joignant ensuite OA″, on a, en AOA″, la grandeur de l'angle β cherché.

Reste à déterminer la droite double DD qui se confond avec A″M″. Elle n'est autre que *la perpendiculaire élevée en* A″ *à* OA″. C'est cette dernière propriété qui se trouve assez laborieusement établie à l'endroit cité et qui, comme nous allons le faire voir ici, peut s'obtenir très simplement.

Si nous considérons le point de rencontre I de OM et de HH, son correspondant I_1 est à l'infini sur OM; donc I′ est à l'infini sur OM′ et la droite II′, qui passe par M″, est parallèle à OM′. Il en résulte que le triangle OIM″ est de similitude constante et, par suite, que le rayon vecteur OI fait avec le lieu de I, qui est la droite HH, le même angle que OM″ avec le lieu de M″, qui est la droite DD. Lorsque le point I vient en φ, le point M″ vient en A″; donc, de même que la droite HH est perpendiculaire à Oφ en φ, la droite DD est perpendiculaire à OA″ en A″. C. Q. F. D.

[N²1f]

SUR UNE CLASSE DE COURBES PLANES REMARQUABLES;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Les courbes Γ dont l'équation intrinsèque a la forme

(1) $$s = \nu \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-2\lambda\nu} - 1}},$$

s et ρ désignant l'arc et le rayon de courbure, comprennent comme cas particuliers plusieurs familles de courbes remarquables. Lorsque

$$\lambda = \mp 1, \qquad \nu = \pm \frac{n+1}{n-1},$$

l'équation (1) représente une *courbe de Ribaucour* d'indice n. La courbe Γ est une *spirale sinusoïde* d'indice n si l'on a

$$\lambda = \mp \frac{n}{n+1}, \qquad \nu = \pm \frac{n+1}{n-1}.$$

Quand $\lambda\nu = 1$, on déduit de (1) une équation de la forme

$$\nu^2 \rho^2 + s^2 = k^2,$$

et les courbes Γ sont donc alors les *cycloïdales*. Pour $\lambda\nu = \frac{1}{2}$, l'équation (1) représente une *développante à point triple d'une cycloïdale*. Si $\nu = 1$, la courbe Γ est l'*antiradiale d'une spirale sinusoïde* d'indice λ; sa courbe de Mannheim est alors une

courbe de Ribaucour d'indice $2\lambda - 1$. Enfin, si l'on a

$$\lambda = \mp \frac{1}{2}, \qquad \nu = \pm \frac{n+1}{n-1},$$

l'équation (1) s'écrit

$$(2) \qquad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} - 1}};$$

les courbes représentées par cette équation sont telles que leurs cercles osculateurs dilatés dans un rapport constant, par rapport à leurs points de contact, aient une tangente commune.

D'une manière générale, la développée de la courbe (1) a pour équation intrinsèque

$$(3) \qquad \rho = \frac{s}{\nu} \sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^{-2\lambda\nu} - 1};$$

cette équation caractérise les courbes auxquelles M. Haton de la Goupillière a donné le nom de *courbes barocentriques* (¹) et qui sont telles que l'abscisse en un point soit proportionnelle à une puissance de l'arc.

Ceci posé, nous allons démontrer plusieurs théorèmes généraux relatifs aux courbes Γ; quelques-unes de ces propositions comprennent comme cas spéciaux un grand nombre de propriétés particulières connues des différentes familles de courbes que nous venons d'énumérer.

1. *Définition géométrique des courbes* Γ. — En

(¹) *Recherches sur les centres de gravité* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1870).

vertu d'une propriété générale des courbes de Cesàro, la perpendiculaire abaissée d'un point d'une courbe de Ribaucour sur la directrice divise le rayon de courbure correspondant de la développée dans un rapport constant. Cette propriété conduit à considérer le problème suivant :

La normale au point M d'une courbe fait avec une droite fixe un angle φ; déterminer les courbes telles que la droite menée par M et faisant avec la normale un angle $\lambda\varphi$ divise le rayon de courbure de la développée dans un rapport constant.

Soient C et C_1 les deux premiers centres de courbure de la courbe correspondant au point M; prenons comme axes mobiles des x et des y la tangente et la normale au point C de la développée, la direction positive de l'axe des x ayant le sens de $\overline{MC}$, celle de l'axe des y ayant le sens de $\overline{CC_1}$. Désignons par ρ_1 et s_1 le rayon de courbure et l'arc de la développée, l'origine des arcs étant telle que le point M ait pour coordonnées $(-s_1, 0)$. La condition imposée se traduit par la relation

$$s_1 \operatorname{tang} \lambda\varphi = \nu\rho_1 = -\nu \frac{ds_1}{d\varphi}.$$

On en déduit en intégrant

$$\cos \lambda\varphi = b s_1^{\lambda\nu}.$$

Si l'on dérive par rapport à s_1, en tenant encore compte de la relation $-\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\varphi}{ds_1}$, on a

$$\sin \lambda\varphi = \nu b \rho_1 s_1^{\lambda\nu - 1}.$$

En éliminant φ et en posant $b = a^{-\lambda\nu}$, on trouve l'équation

$$\rho_1 = \frac{s_1}{\nu}\sqrt{\left(\frac{s_1}{a}\right)^{-2\lambda\nu} - 1},$$

identique à (3); par conséquent, *les courbes cherchées sont les courbes* Γ.

Quand on suppose $\lambda = \pm 1$, on retrouve la propriété des courbes de Ribaucour, rappelée ci-dessus.

Dans le cas particulier d'une spirale sinusoïde d'indice n, la droite menée par M et divisant le rayon de courbure de la développée dans le rapport de $-(n+1)$ à $2n$ est le rayon vecteur du point M, et la propriété générale des courbes Γ que nous venons d'obtenir donne cette propriété bien connue :

Lorsque le rayon vecteur tourne uniformément autour du pôle, la tangente tourne uniformément autour du point de contact.

La signification des paramètres λ, ν ressort des considérations qui précèdent; il est utile d'observer qu'une courbe Γ caractérisée par les paramètres λ, ν peut aussi être considérée comme correspondant aux paramètres $-\lambda$, $-\nu$.

2. *Causticoïdes d'indices* $\pm\lambda$ *des courbes* Γ. — Soit Δ la droite fixe considérée dans la définition des courbes Γ, et proposons-nous de déterminer les causticoïdes d'indices $\pm\lambda$ produites par des rayons parallèles à Δ, c'est-à-dire les enveloppes des droites qui font avec la normale MC les angles $\pm\lambda\varphi$. En vertu d'une remarque qui précède, il suffit de chercher, par exemple, l'enveloppe de la droite qui fait avec MC l'angle $\lambda\varphi$; l'autre enveloppe se déduit du résultat obtenu en considérant la courbe comme étant définie par les paramètres $-\lambda$, $-\nu$. La droite considérée a pour équation

$$f(x, y, s_1) \equiv y - (x + s_1)\operatorname{tang}\lambda\varphi = 0;$$

les coordonnées du point où elle touche son enveloppe s'obtiennent en résolvant le système formé par cette équation et

$$(y-\rho_1)\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}+\rho_1\frac{\partial f}{\partial s}=0;$$

on trouve

$$x=\frac{s_1\cos^2\lambda\varphi}{1-\lambda}-s_1, \qquad y=\frac{s_1\sin\lambda\varphi\cos\lambda\varphi}{1-\lambda}.$$

On déduit de là, d'après les formules de Cesàro,

$$\frac{\delta x}{ds_1}=\frac{\cos\lambda\varphi}{1-\lambda}\left[\cos\lambda\varphi+\frac{(2\lambda-1)s_1\sin\lambda\varphi}{\rho_1}\right],$$
$$\frac{\delta y}{ds_1}=\frac{\sin\lambda\varphi}{1-\lambda}\left[\cos\lambda\varphi+\frac{(2\lambda-1)s_1\sin\lambda\varphi}{\rho_1}\right].$$

Si l'on désigne par s' et ρ' l'arc et le rayon de courbure de la causticoïde, on a donc

$$\sigma=\frac{ds'}{ds_1}=\frac{1}{1-\lambda}\left[\cos\lambda\varphi+\frac{(2\lambda-1)s_1\sin\lambda\varphi}{\rho_1}\right]$$
$$=\frac{1+(2\lambda-1)\nu}{1-\lambda}\,b s_1^{\lambda\nu},$$
$$\rho'=\frac{\sigma\rho_1}{1-\lambda}=\frac{1+(2\lambda-1)\nu}{(1-\lambda)^2}\,b\rho_1 s_1^{\lambda\nu}.$$

En supposant

$$(4)\qquad \lambda\nu-1\neq 0, \qquad 1+(2\lambda-1)\nu\neq 0,$$

et en posant

$$c=\frac{1+(2\lambda-1)\nu}{(1-\lambda)(\lambda\nu-1)}\,b^{\frac{1}{\lambda\nu}},$$

on trouve, pour l'équation intrinsèque de la causticoïde d'indice λ,

$$\rho'=\frac{(\lambda\nu-1)s'}{\nu(1-\lambda)}\sqrt{\left(\frac{s'}{c}\right)^{-\frac{2\lambda\nu}{\lambda\nu+1}}-1};$$

cette équation représente une courbe barocentrique.

développée de la courbe Γ d'équation

$$(5) \qquad s = \frac{\nu(1-\lambda)}{\lambda\nu+1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{-\frac{2\lambda\nu}{\lambda\nu+1}} - 1}}.$$

On a donc ce théorème :

Les causticoïdes d'indices $\pm\lambda$ *des courbes* Γ *sont des courbes barocentriques.*

Par exemple, pour une courbe de Ribaucour d'indice n, on a

$$\lambda = -1, \qquad \nu = \frac{n+1}{n-1},$$

et l'équation (5) s'écrit

$$s = (n+1) \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{-(n+1)} - 1}}.$$

Les caustiques par réflexion des courbes de Ribaucour, pour des rayons incidents perpendiculaires à la directrice, sont les développées des courbes telles que leurs cercles osculateurs dilatés dans un rapport constant, par rapport à leurs points de contact, aient une tangente commune ([1]).

Si la seconde condition (4) n'est pas remplie, la courbe Γ est une spirale sinusoïde d'indice n définie par les paramètres

$$\lambda = \frac{n}{n-1}, \qquad \nu = -\frac{n+1}{n-1};$$

l'une des causticoïdes se réduit au pôle, l'autre est, d'après l'équation (5), la développée d'une spirale

---

([1]) Cette proposition ne diffère pas essentiellement d'un théorème connu dû à Cesàro (*Cf.* § 4).

sinusoïde d'indice $\frac{n}{n+1}$. Ce résultat est identique à cette proposition connue :

La podaire d'une spirale sinusoïde d'indice n par rapport au pôle est une spirale sinusoïde d'indice $\frac{n}{n+1}$.

Quand Γ est un cercle, l'équation (5) prend la forme

$$s = \frac{1-\lambda}{\lambda} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^2 - 1}};$$

par conséquent, *toutes les causticoïdes du cercle sont des cycloïdales* (1).

Si Γ est une *cycloïdale*, on trouve comme causticoïdes des *cycloïdales*.

Enfin, lorsque Γ est une des courbes (2), la causticoïde d'indice $\lambda = \frac{1}{2}$ est une *courbe de Ribaucour*.

Dans le cas où $\lambda\nu = -1$, on trouve de même, comme équation des causticoïdes,

$$\rho' = \frac{b\nu}{\nu \pm 1} \sqrt{e^{\mp \frac{2s'}{b\nu}} - 1}.$$

Par exemple, quand Γ est la *syntractrice*

$$s = 2 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 1}},$$

la causticoïde d'indice $-\frac{1}{2}$ pour des rayons incidents parallèles à l'axe de symétrie est une tractrice ; cette

(1) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 311.

proposition résulte d'ailleurs immédiatement des propriétés connues de la syntractrice.

3. *Courbes directrices des courbes* Γ. — Cherchons maintenant les développées intermédiaires d'indices $\pm \frac{1}{\nu}$ de la courbe Γ, c'est-à-dire les lieux (N) et (N′) des points N et N′ tels que

$$\overline{\text{CN}} : \overline{\text{NM}} = \nu, \qquad \overline{\text{CN}'} : \overline{\text{N}'\text{M}} = -\nu.$$

Le point N a pour coordonnées

$$\xi = -\frac{s_1}{\nu + 1}, \qquad \eta = 0.$$

et l'on a

$$\frac{\partial \xi}{ds_1} = \frac{\nu}{\nu + 1}, \qquad \frac{\partial \eta}{ds_1} = -\frac{s_1}{(\nu + 1)\rho_1} = -\frac{\nu}{\nu + 1} \cot \lambda\varphi.$$

La tangente à (N) en N est donc perpendiculaire à la droite menée par M et faisant l'angle $\lambda\varphi$ avec la normale MC : quand Γ est une courbe de Ribaucour, correspondant à $\lambda = 1$, le lieu de N est donc une droite, et l'on retrouve la directrice. Par analogie avec ce cas, nous désignerons sous le nom de *courbes directrices* des courbes Γ les développées intermédiaires (N) et (N′) considérées.

Si s'' et ρ'' désignent l'arc et le rayon de courbure du lieu de N, on a

$$\frac{ds''}{ds_1} = \frac{\nu}{(\nu + 1) \sin \lambda\varphi} = \frac{s_1^{1-\lambda\nu}}{(\nu + 1) b \rho_1},$$

$$s'' = \frac{\nu}{(\nu - 1) b} \int \frac{s_1^{-\lambda\nu} ds_1}{\sqrt{\left(\frac{s_1}{a}\right)^{2\lambda\nu} - 1}},$$

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{1 - \lambda}{\rho_1} \frac{ds_1}{ds''}, \qquad s_1 = [b(\nu + 1)(1 - \lambda)\rho'']^{\frac{1}{1-\lambda\nu}},$$

et l'on en déduit, pour l'équation cherchée,

$$s'' = \frac{\nu(1-\lambda)}{1-\lambda\nu} \int \frac{d\rho''}{\sqrt{\left(\frac{\rho''}{h_1}\right)^{\frac{2\lambda\nu}{1-\lambda\nu}} - 1}},$$

où l'on a posé

$$h_1 = \frac{h^{\frac{1}{\lambda\nu}}}{(\nu-1)(1-\lambda)}.$$

L'équation de la développée intermédiaire d'indice $-\frac{1}{\nu}$ s'écrit de même

$$(6) \qquad s'' = \frac{\nu(1-\lambda)}{1-\lambda\nu} \int \frac{d\rho''}{\sqrt{\left(\frac{\rho''}{h_2}\right)^{-\frac{2\lambda\nu}{1-\lambda\nu}} - 1}}.$$

Les développées intermédiaires d'indices $\pm \frac{1}{\nu}$ *des courbes* Γ *sont aussi des courbes* Γ.

Dans le cas d'une cycloïdale, les développées intermédiaires (N) et (N') se confondent avec le cercle directeur. Les courbes directrices des développantes à points triples des cycloïdales sont des cycloïdales. L'une des courbes directrices d'une spirale sinusoïde d'indice n est une spirale sinusoïde d'indice $\frac{n}{1-n}$. L'une des courbes directrices d'une courbe de Ribaucour est la directrice rectiligne ; l'équation de la seconde courbe directrice s'obtient en faisant dans (6)

$$\lambda = 1, \qquad \nu = -\frac{n+1}{n-1}.$$

On trouve ainsi l'équation

$$s'' = \frac{n+1}{n} \int \frac{d\rho''}{\sqrt{\left(\frac{\rho''}{h_2}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1}},$$

analogue à (2). On a donc ce théorème :

Les lieux des conjugués harmoniques des points

où les normales des courbes de Ribaucour rencontrent la directrice rectiligne, par rapport aux extrémités des rayons de courbure correspondants, sont les courbes telles que leurs cercles osculateurs dilatés dans un rapport constant, par rapport à leurs points de contact, aient une tangente commune.

4. *Cercles osculateurs dilatés.* — Considérons le cercle de centre N et de rayon NM; le point M′ où ce cercle touche la seconde branche de son enveloppe est le symétrique de M par rapport à la tangente à (N) en N et appartient, en vertu de ce qui précède, à la droite menée par M et faisant avec MC l'angle $\lambda\varphi$. Soient T et C′ les points où MM′ et NM′ touchent leurs enveloppes; les points C, T, C′ sont collinéaires [1]. D'autre part, il est aisé de voir que la droite NM′ enveloppe la causticoïde d'indice $\lambda : (\lambda - 1)$ de la courbe (N) : on déduit de là, au moyen du résultat établi au paragraphe 2, que cette droite reste normale à une courbe Γ d'équation

$$(7) \qquad s = \nu(2\lambda - 1) \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{g}\right)^{2\lambda\nu} - 1}}.$$

Comme on a en outre

$$\frac{\overline{MT}}{\overline{MM'}} = \frac{\nu + 1}{2\nu(1 - \lambda)}$$

et, par suite,

$$\frac{\overline{NC'}}{\overline{NM'}} = -\frac{1}{\nu(2\lambda - 1)},$$

on voit que la seconde branche Γ′ de l'enveloppe, lieu

[1] *Nouvelles Annales*, 1915, p. 435; 1916, p. 5.

de M′, est la courbe (7) et que la courbe directrice (N) de Γ est aussi une courbe directrice de Γ′. On a un résultat analogue en considérant la courbe Γ comme étant définie par les paramètres $-\lambda$, $-\nu$, et l'on peut donc énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'on dilate les cercles osculateurs d'une courbe Γ *par rapport à leurs points de contact dans le rapport constant* $\nu : (\nu \pm 1)$, *le lieu des centres et l'enveloppe des cercles obtenus sont des courbes* Γ, *et la corde de contact de ces cercles avec leur enveloppe reste normale à une courbe* Γ.

Les trois dernières courbes Γ correspondent respectivement à ces valeurs des paramètres

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{llll} -\dfrac{\lambda}{\lambda\mp1}, & -\dfrac{\nu(\lambda\mp1)}{1-\lambda\nu}; & \dfrac{\lambda}{2\lambda\mp1}, & \nu(2\lambda\mp1); \\ & & -\dfrac{\lambda}{\lambda-1}, & -\dfrac{\nu(\lambda\mp1)}{1+\lambda\nu}. \end{array}\right.$$

Cesàro a démontré [1] que, *si l'on dilate dans le rapport* $\frac{1}{2}(n+1)$ *les cercles osculateurs d'une courbe* (2), *par rapport à leurs points de contact, les cercles obtenus sont tangents à une droite, et leurs centres appartiennent à une courbe de Ribaucour d'indice* $\frac{2n}{n-1}$.

Cette proposition est un cas particulier du théorème que nous venons d'obtenir ; il suffit de faire, dans les expressions (8),

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \qquad \nu = \frac{n+1}{n-1},$$

et de prendre dans ces expressions les signes inférieurs

---

[1] *Natürliche Geometrie*, p. 65.

là où figurent les doubles signes. En outre, la dernière partie du théorème général permet d'ajouter à la proposition de Cesàro la propriété suivante :

La corde de contact du cercle dilaté avec son enveloppe reste normale à une courbe de Ribaucour d'indice $\frac{1}{2}(n-1)$.

Par exemple, si $n = \frac{1}{3}$, la courbe (2) est une *néphroïde de Proctor;* le lieu des centres des cercles osculateurs contractés dans le rapport $\frac{2}{3}$ est le *cercle* directeur, et les cercles considérés touchent un diamètre du cercle directeur; les cordes de contact de ces cercles avec leur enveloppe sont normales à une courbe de Ribaucour d'indice $-\frac{1}{3}$, elles enveloppent donc une *astroïde régulière.*

5. *Les courbes* Γ *comme roulettes.* — M. Braude a démontré (¹) qu'on peut faire rouler, sur la développée intermédiaire d'indice μ d'une courbe (C) d'équation intrinsèque $f(s, \rho) = 0$, la radiale de la courbe

$$f\left[\frac{1+\mu}{\mu}s, (1-\mu)\rho\right] = 0, \tag{9}$$

de manière que la roulette du pôle de la radiale soit la courbe (C); on peut de même faire rouler, sur la développée intermédiaire, la courbe de Mannheim de (9) de manière que la base de cette courbe de Mannheim enveloppe la courbe (C).

Par conséquent, on peut faire rouler sur la courbe

(¹) *Les coordonnées intrinsèques* [*Scientia* (*Phys.-Math.*, n° 34), p. 93].

directrice (N) d'une courbe Γ la radiale de la courbe

$$(10) \qquad s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{l}\right)^{2\lambda\nu} - 1}} \qquad \left(l = \frac{a\nu}{\nu+1}\right),$$

de façon que le pôle décrive la courbe Γ, ou faire rouler sur (N) la courbe de Mannheim de (10), de façon que la base enveloppe Γ. Or la radiale de (10) est une spirale sinusoïde d'indice $\lambda\nu$, sa courbe de Mannheim est une courbe de Ribaucour d'indice $2\lambda\nu - 1$; on a donc ce théorème :

On peut faire rouler sur chacune des courbes directrices d'une courbe Γ, *définie par les paramètres* λ, ν, *une spirale sinusoïde d'indice* $\lambda\nu$ *et une courbe de Ribaucour d'indice* $2\lambda\nu - 1$ *de manière que le lieu du pôle de la spirale sinusoïde et l'enveloppe de la directrice de la courbe de Ribaucour soient la courbe* Γ.

Cette proposition généralise plusieurs propriétés connues. Si l'on suppose d'abord que Γ soit une courbe de Ribaucour et qu'on prenne comme courbe directrice sa directrice rectiligne, on retrouve ce théorème de Bonnet :

Quand une spirale sinusoïde d'indice n *roule sur une droite, son pôle décrit une courbe de Ribaucour d'indice* $(n-1):(n+1)$.

La seconde partie du théorème général donne ensuite cette proposition :

Quand une courbe de Ribaucour d'indice n *roule sur une droite, sa directrice enveloppe une courbe de Ribaucour d'indice* $(n-1):(n+3)$.

On obtient de même, en considérant comme courbe Γ une spirale sinusoïde, le théorème suivant :

On peut faire une courbe de Ribaucour d'indice $2n-1$ sur une spirale sinusoïde d'indice n, de façon que la directrice de la courbe de Ribaucour enveloppe une spirale sinusoïde d'indice $n:(n+1)$.

Si l'on suppose $\lambda\nu = 1$, on retrouve cette définition bien connue des cycloïdales :

Lorsqu'un cercle roule sur un cercle, l'enveloppe d'un diamètre du cercle mobile est une cycloïdale.

En considérant le cas où $\lambda\nu = \frac{1}{2}$, on voit qu'*on peut faire rouler une cardioïde sur une cycloïdale de manière que le point de rebroussement se déplace parallèlement à une cycloïdale, ou faire rouler une cycloïde sur une cycloïdale de manière qu'une parallèle à la base enveloppe une autre cycloïdale.*

6. *Courbes de Cesàro osculant les courbes* Γ. — Dans ce qui suit, nous prenons comme axes mobiles des x et des y la tangente et la normale au point variable M de la courbe Γ; et nous désignons par ρ_2 et ρ_3 les troisième et quatrième rayons de courbure correspondant au point M de Γ. On déduit facilement de l'équation (1), par deux dérivations, la relation [1]

$$(11) \qquad \frac{\lambda}{\nu}\rho^2 + (\lambda\nu - 1)\rho_1^2 + \rho\rho_2 = 0.$$

---

(1) Cette relation donne lieu à une construction simple du troisième centre de courbure correspondant au point M de Γ, quand on connaît C et C_1 (*voir* Cesàro, *Natürliche Geometrie*, p. 77).

En dérivant encore par rapport à s, on obtient la relation

$$\frac{2\lambda}{\nu}\rho_1 + \rho_3 + (2\lambda\nu - 1)\frac{\rho_1\rho_2}{\rho} = 0;$$

on peut en déduire une construction simple du quatrième centre de

D'autre part, d'une manière générale, si P et H désignent les invariants

$$P = (n-1)^2\rho^2 - 2n(n+1)\rho_1^2 - (n^2-1)\rho\rho_2,$$
$$H = \frac{n(n-1)^2}{n-1}\rho^2 + (2n^2+n-1)\rho_1^2 - (n^2-1)\rho\rho_2$$

des courbes de Ribaucour et des spirales sinusoïdes d'indice n, le cercle directeur de la courbe de Cesàro d'indice n qui oscule une courbe en un point où les trois premiers rayons de courbure sont ρ, ρ_1, ρ_2, a pour centre le point O de coordonnées

$$(12) \qquad \xi_1 = \frac{(n^2-1)\rho^2\rho_1}{P}, \qquad \eta_1 = \frac{(n-1)^2\rho^3}{P};$$

ce cercle a pour rayon

$$R = (n-1)\frac{\rho^2}{P}\sqrt{-(n+1)H}$$

et pour équation (¹)

$$(13) \quad x^2+y^2 - \frac{2(n-1)}{P}\rho^2[(n+1)\rho_1 x + (n-1)\rho y] + \frac{n+1}{P}(n-1)^2\rho^4 = 0.$$

Si l'on pose dans l'expression de P

$$n = \frac{\lambda\nu-1}{\lambda\nu+1},$$

on a

$$P = \frac{4}{(\lambda\nu+1)^2}\{\rho^2 - \lambda\nu[(\lambda\nu-1)\rho_1^2 + \rho\rho_2]\};$$

par conséquent, si la relation (11) est vérifiée, la valeur

---

courbure correspondant à M quand on a déterminé les trois premiers centres de courbure [*voir* notre Note *Sur les troisième et quatrième centres de courbure des courbes de Cesàro* (*Nouvelles Annales*, 1919).

(¹) Cesàro-Kowalewski, *Natürliche Geometrie*, p. 77.

de P s'écrit

$$P = \frac{4(1-\lambda^2)}{(\lambda\nu+1)^2}\rho^2.$$

et les expressions (12) se réduisent à

$$\xi_1 = -\frac{\lambda\nu}{1-\lambda^2}\rho_1, \qquad \eta_1 = \frac{\rho}{1-\lambda^2}.$$

Le pôle de la courbe de Cesàro d'indice

$$(\lambda\nu-1):(\lambda\nu+1)$$

qui oscule en M *la courbe* Γ *se projette sur les deux premiers rayons de courbure en des points qui divisent ces rayons de courbure dans des rapports constants.*

On peut déduire de cette propriété une construction simple du centre de courbure du lieu des pôles des courbes de Cesàro d'indice $(\lambda\nu-1):(\lambda\nu+1)$ osculant la courbe Γ. Soit, en effet, Q le point où MO rencontre CC_1 ; le lieu de Q est, d'après les expressions (12), une développée intermédiaire de la développée de Γ. La normale au lieu de Q est donc connue quand on connaît le troisième centre de courbure de Γ en M. D'autre part, la tangente en O au lieu de ce point est la droite MQ, et le point O divise le segment MQ dans un rapport constant ; la construction cherchée est donc ramenée à un problème connu [1].

7. La propriété suivante est caractéristique pour les courbes Γ :

Les courbes Γ *sont les courbes telles que le cercle*

---

[1] *Voir* Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 20.

directeur de la courbe de Cesàro d'indice donné qui oscule la courbe en un point soit vu de ce point sous un angle constant.

Proposons-nous, en effet, de déterminer les courbes qui jouissent de cette propriété; la condition du problème s'exprime par la relation

$$\rho_1^2 + \eta_1^2 = \alpha R^2,$$

ou

$$(n-1)^2\rho_1^2 - (n-1)^2\rho^2 + \alpha n(n-1)^2\rho^2$$
$$+ \alpha(n-1)(2n^2+n-1)\rho_1^2 - \alpha(n+1)(n^2-1)\rho\rho_2 = 0,$$

ou encore

$$(14)\qquad \frac{(n-1)(\alpha n-1)}{\alpha(n+1)^2}\rho^2 + \frac{1}{\alpha(n^2-1)}[n-1+\alpha(2n^2+n-1)]\rho_1^2 - \rho\rho_2 = 0.$$

On reconnaît au premier membre l'invariant d'une courbe Γ. En identifiant (11) et (14), on trouve

$$\frac{n-1}{n+1} = \pm\frac{1}{\nu};$$

on en déduit que, dans la définition d'une courbe Γ de paramètres λ, ν, par la propriété énoncée ci-dessus, il faut considérer les courbes de Cesàro osculantes d'indice $(\nu+1):(\nu-1)$ ou d'indice $(\nu-1):(\nu+1)$. Quant à la constante α, elle a pour expression, suivant que l'on considère les premières de ces courbes de Cesàro ou les secondes,

$$\alpha = \frac{1 \mp \nu}{2\lambda\nu \pm \nu - 1}.$$

On peut démontrer de la même manière d'autres propriétés des courbes Γ: si l'on remarque, par

exemple, que la puissance de M par rapport au cercle (13) est

$$\frac{(n+1)(n-1)^2}{P}\rho^4,$$

on obtient aisément la proposition suivante :

Le carré du rayon de courbure en un point d'une courbe Γ *est proportionnel à la puissance de ce point par rapport au cercle directeur de la courbe de Cesàro d'indice* $(\lambda\nu - 1) : (\lambda\nu + 1)$ *qui oscule la courbe en ce point.*

8. *Courbes de Ribaucour et spirales sinusoïdes osculant les courbes* Γ. — D'après un théorème de M. Braude [1], l'enveloppe des directrices des courbes de Ribaucour d'indice n qui osculent une courbe est la développée intermédiaire d'indice $(1-n) : (1+n)$ de cette courbe. D'autre part, nous avons montré [2] que le lieu des pôles des spirales sinusoïdes d'indice n qui osculent une courbe est la seconde branche de l'enveloppe des cercles obtenus en dilatant les cercles osculateurs de la courbe dans le rapport $\frac{1}{2}(n+1)$, par rapport à leurs points de contact. Les théorèmes trouvés aux paragraphes 3 et 4 peuvent donc s'énoncer ainsi :

Les enveloppes des directrices des courbes de Ribaucour d'indices $(\nu \pm 1) : (\nu \mp 1)$ *qui osculent une courbe* Γ, *définie par les paramètres* λ, ν, *sont des courbes* Γ *de paramètres*

$$-\lambda : (\lambda \mp 1), \qquad -\nu(1 \mp \lambda) : (1 - \lambda\nu).$$

(1) *Les coordonnées intrinsèques*, p. 63.

(2) *Sur les spirales sinusoïdes osculantes* (*Nouvelles Annales*, 1919).

Les lieux des pôles des spirales sinusoïdes d'indices $(\nu \pm 1) : (\nu \mp 1)$ qui osculent une courbe Γ de paramètres λ, ν sont des courbes Γ de paramètres

$$-\lambda : (2\lambda \pm 1), \qquad \nu : (2\lambda \mp 1).$$

Ces théorèmes contiennent toutes les propositions particulières rencontrées par Cesàro dans l'étude des paraboles, hyperboles équilatères et spirales sinusoïdes osculantes [1].

Par exemple, si l'on considère la parabole comme courbe de Ribaucour d'indice -2, on retrouve que les directrices des paraboles osculant une hypocycloïde à trois rebroussements sont tangentes au cercle directeur, et que les directrices des paraboles qui osculent une hyperbole équilatère enveloppent une spirale sinusoïde d'indice $-\frac{2}{3}$.

Dans le cas des cycloïdales, on obtient cette proposition :

Les lieux des pôles des spirales sinusoïdes d'indices $\frac{n+1}{n}$ ou $\frac{n}{n+1}$ qui osculent une cycloïdale de module n sont des cycloïdales de modules $n+1$ et $-n$.

Enfin, pour les courbes remarquables (2), on a le théorème suivant :

Le lieu des pôles des spirales sinusoïdes d'indice n qui oscule la courbe (2) est une droite.

---

[1] *Natürliche Geometrie*, p. 78-89.

CORRESPONDANCE.

M. **F. Balitrand.** — *Au sujet des foyers rationnels des courbes.* — Étant donnée dans un plan une courbe (C), si l'on prend sa polaire réciproque par rapport à un cercle de centre (α, β), on obtient une courbe (C_1). Les points cycliques du plan donnent les droites isotropes issues de (α, β); les tangentes à (C), issues de ces points, donnent les points d'intersection de ces droites isotropes avec (C_1); les foyers de (C) donnent les droites qui joignent deux à deux ces points d'intersection.

Comme en général (C) n'admet pas les points cycliques comme points multiples, de même en général (C_1) n'admet pas les droites isotropes issues de (α, β), quel que soit (α, β), comme tangentes multiples, c'est-à-dire ne possède pas de foyers rationnels. Il semble donc bien que l'équation

$$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]\,Q^2(x,y)=P^2(x,y)$$

doit être envisagée plutôt comme définissant une classe de courbes remarquables, que comme fournissant l'extension aux courbes de degré quelconque de la définition donnée par J. Bret pour les foyers des coniques.

Dans le cas où une courbe admet un foyer rationnel, en le choisissant pour origine, son équation prend la forme

$$(x^2+y^2)\,f^2(x,y)=\varphi^2(x,y);$$

et l'on voit que cette courbe est la transformée, par dualité, d'une courbe de direction de Laguerre.

La considération des droites, qui joignent deux à deux les points d'intersection d'une courbe avec les droites isotropes issues d'un point de son plan, remonte au moins à Laguerre (*Bulletin de la Société philomathique*, 1867; *Œuvres complètes*, t. 2, p. 27). Il les a appelées *droites conjointes*.

Dans les coniques, les lignes conjointes, envisagées d'abord par Terquem et Chasles, ont permis à M. M. d'Ocagne (*N. A.*, 1896, p. 353) de déduire de leurs propriétés, au moyen d'une transformation par polaires réciproques, celles des foyers de ces courbes.

Dans l'espace, on peut de même envisager les cônes qui passent par l'intersection d'une quadrique et d'un cône isotrope et déduire de leurs propriétés, par la même transformation, celles des foyers et des focales des surfaces du second ordre. Cette déduction a-t-elle été faite?

M. **M. d'Ocagne**. — *A propos de quelques applications géométriques de la théorie des infiniment petits*. — Il s'agit de celles envisagées par M. M. Weill dans une Note récente (*N. A.*, 1918, p. 424).

La formule trouvée par cet auteur pour résoudre le problème de la tangente au lieu du sommet d'un angle circonscrit à des courbes données est une variante de celle donnée pour le même objet par M. Bouvaist (*N. A.*, 1918, p. 164). Il est d'ailleurs bien facile de passer de l'une à l'autre.

En effet, avec les notations de M. Weill, si la tangente au lieu (M) du sommet de l'angle (voir la figure, *loc. cit.*, p. 425) coupe la corde AB des contacts en T, la formule de M. Bouvaist s'écrit

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{PA}}\,\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BT}} = \frac{\overline{\mathrm{AM}}^3}{\overline{\mathrm{BM}}^3}\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}.$$

Or, h et h' étant les distances des points A et B à la tangente MT, on a

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{BT}} = \frac{h}{h'}.$$

De plus, δ et δ' étant les distances du point P à AM et BM, on a, par la comparaison des aires des triangles MAP et MBP,

$$\frac{\delta.\mathrm{AM}}{\delta'.\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}}.$$

Les deux dernières formules écrites permettent de transformer immédiatement la précédente en

$$\frac{\overline{\mathrm{BM}}^2\,\overline{\mathrm{PB}}^2}{\overline{\mathrm{AM}}^2\,\overline{\mathrm{PA}}^2} = \frac{\delta' h' \mathrm{R}'}{\delta h \mathrm{R}};$$

c'est la formule de M. Weill.

Quant à la détermination géométrique des maxima et minima de certains éléments liés à un segment de droite variable, indiquée par M. Weill dans la seconde partie de sa Note, elle rentre dans la méthode générale que nous indiquons dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 146) après en avoir fait de nombreuses applications, notamment dans notre Note *Sur les cordes normales de la parabole* (*N. A.*, 1896, p. 274) où l'on trouvera (p. 278) le théorème sur les courbes quelconques qui termine la Note de M. Weill (*loc. cit.*, p. 429).

M. R. **Bouvaist**. — *Au sujet de la question proposée* n° 2374 (M. d'Ocagne). — Je signale la construction suivante qui généralise la question proposée :

Soient O un point d'une courbe (M) orientée, M un point de cette courbe, G le centre de gravité de l'arc

OM, lorsque M se déplace sur (M), G décrit une courbe (G), qui jouit des propriétés suivantes :

1° La tangente à (G) en G est la droite GM.

2° Le plan osculateur en G à (G) contient la tangente en M à (M).

3° Si l'on mène par G un vecteur parallèle à la tangente en M à (M) et si l'on prend sur ce vecteur un segment $\overline{GK} = \frac{\overline{GM}^2}{\text{arc OM}}$, la perpendiculaire élevée en K à GK dans le plan osculateur à (G) en G rencontre la normale principale à (G) en G au centre de courbure de (G) en ce point.

M. **d'Ocagne**. — *Sur les courbes algébriques singulières sous le rapport des barycentres cycliques*. — Le premier des théorèmes contenus dans une Note récente *sur les cercles bitangents à la parabole* (*N. A.*, 1918, p. 464) n'est qu'un cas particulier d'une propriété depuis longtemps connue (voir *Journal de Mathématiques spéciales* de Longchamps, 1891, p. 97). Je ne mentionne ici le fait que pour avoir occasion de signaler à nouveau la généralisation que j'ai par la suite donné de cette propriété de la parabole.

Ayant remarqué que le barycentre G des points de rencontre d'un cercle et d'une courbe algébrique quelconque ne dépend que du centre C de ce cercle, et non de son rayon, j'ai donné à G le nom de *barycentre cyclique* de C par rapport à cette courbe, et fait voir [1] que les coordonnées de G s'expriment en fonction linéaire de celles de C, ou encore que la relation entre G et C n'est autre qu'une affinité.

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1902, p. 83.

Toutefois, il est une classe importante de courbes algébriques, singulières à ce point de vue, et dont j'ai donné la définition la plus générale [1], pour lesquelles les barycentres cycliques G, de tous les points C du plan, sont situés *sur une même droite* Δ de ce plan, tous les points C qui correspondent à un même point G de Δ appartenant à une même droite D perpendiculaire à Δ et dont la distance δ à G est, au reste, constante.

La parabole est la plus simple de ces courbes singulières; pour elle, Δ se confond avec son axe et la distance est égale à son paramètre.

Les paraboles d'ordre supérieur appartiennent à la même catégorie, mais, pour elles, dès le troisième ordre, δ est nul.

Les courbes de Lamé

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1,$$

d'ordre impair, offrent également ce caractère, avec $\delta = 0$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2313.

(1917, p. 279.)

L'équation d'une conique étant $f(x, y, z) = 0$, *on pose*

$$f_{11} = f(x_1, y_1, z_1),$$

$$f_{12} = \frac{1}{2}(x_2 f'_{x_1} + \ldots).$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 86.

Si un polygone de n côtés $M_1M_2\ldots$ *est circonscrit à la conique, on a*

$$f_{11}\times\ldots\times f_{nn}=(-1)^n f_{12}\times\ldots\times f_{n1}.$$

G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. L. MALOUE.

En écrivant que le point M_2 appartient au faisceau des tangentes issues de M_1, on a

$$f_{11}f_{22}=f_{12}^2.$$

En multipliant membre à membre cette relation et les relations analogues, on trouve

$$f_{11}f_{22}\ldots f_{nn}=\pm f_{12}f_{23}\ldots f_{n1},$$

La relation indiquée est donc obtenue, au signe près.

Pour l'établir complètement, on peut procéder géométriquement, en démontrant le théorème suivant :

Quand un polygone est circonscrit à une conique, les points de contact qui sont extérieurs aux côtés correspondants sont en nombre pair.

On reconnaît en effet aisément que le choix du signe, dans la relation à démontrer, résulte immédiatement de cette proposition.

Quant à la proposition même, voici l'esquisse de sa démonstration : si l'on considère un polygone quelconque circonscrit à une ellipse et que, laissant fixe tous les côtés de ce polygone, à l'exception d'un seul, on fasse varier ce dernier côté en le laissant tangent à la courbe, on remarque que, chaque fois qu'il passe en coïncidence avec l'un des côtés fixes, le nombre des points de contact extérieurs ne varie pas, ou bien varie de deux unités dans un sens ou dans l'autre. Le nombre ne change donc pas de parité. Or on peut passer, au moyen de cette opération, d'un polygone convexe circonscrit à l'ellipse, polygone pour lequel le théorème est vérifié, à un polygone quelconque. La proposition est donc établie pour l'ellipse.

On l'étend ensuite par projection à l'hyperbole, en remarquant que si des points sont marqués sur les côtés d'un polygone, une projection conique n'altère pas la parité du nombre des points qui sont extérieurs aux côtés correspondants. En effet, les seuls côtés dont les régions extérieure et intérieure soient échangées par l'opération sont ceux qui sont rencontrés *intérieurement* par la droite projetée suivant la droite de l'infini. Or ces côtés sont en nombre pair. Donc, etc.

Mais cette démonstration suppose essentiellement la réalité du polygone. Pour établir le théorème dans toute sa généralité, il faut procéder analytiquement. Nous nous y prendrons comme il suit :

On peut, d'une infinité de manière, définir un changement de coordonnées tel que l'on ait identiquement

$$f(x, y, z) = F(X, Y, Z) = X^2 - 2YZ.$$

De l'identité valable, quel que soit λ,

$$f(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) = F(X_1 + \lambda X_2, \ldots)$$

on tire

$$f_{12} = F_{12} = X_1 X_2 - Z_1 Y_2 - Y_1 Z_2.$$

Un point de la conique

$$X^2 - 2YZ = 0$$

peut être défini paramétriquement par

$$X = 2u, \qquad Y = u^2, \qquad Z = 2.$$

Soit u_i le paramètre du point de contact du côté $M_{i-1}M_i$ (en posant $M_0 = M_n$). On trouve, par un calcul facile,

$$X_1 = u_1 + u_2, \qquad Y_1 = u_1 u_2, \qquad Z_1 = 2,$$
$$F_{11} = (u_1 - u_2)^2, \qquad F_{12} = -(u_1 - u_2)(u_2 - u_3).$$

Par multiplication de ces relations et des relations analogues, on obtient bien celle qu'il fallait démontrer.

Autres solutions par MM. J. Rose et M. Faucheux.

QUESTIONS.

2394. Posons $C_m^p = \alpha_p$, C_m^p désignant les combinaisons de m lettres p à p. Calculer

$$\sum_{p=1}^{p=m-1} C_{\alpha_p}^2.$$

JEAN BOUCHARY.

2395. Si trois surfaces tétraédrales symétriques d'indices n_1, n_2, n_3 ayant même tétraèdre de symétrie se touchent en un même point M, les courbures géodésiques G_1, G_2, G_3 de leurs lignes de courbure qui se touchent en M sont liées par la relation

$$(n_2 - n_3) G_1 + (n_3 - n_1) G_2 + (n_1 - n_2) G_3 = 0.$$

R. GOORMAGHTIGH.

2396. Soit π la parabole circonscrite à un quadrilatère inscriptible et considérons les normales a, b, c, d à π aux sommets du quadrilatère. Les orthopôles de la directrice de π par rapport aux quatre triangles obtenus en prenant les droites a, b, c, d trois à trois sont quatre points collinéaires.

R. GOORMAGHTIGH.

2397. Soient P et Q les intersections d'une conique (S) avec les tangentes à une conique (Σ) issues d'un point variable M de la première. On sait que PQ enveloppe une conique appartenant au faisceau (S, Σ). Démontrer que le point de contact de PQ avec son enveloppe est, par rapport au segment PQ, le conjugué harmonique de l'intersection de cette droite avec la polaire de M par rapport à (Σ). G. BOULLOUD.

2398. Si H, I et ω sont respectivement les orthocentres et les centres des cercles inscrit et d'Euler d'un triangle ABC et

si Δ est la tangente commune à ces cercles, la distance de H à Δ a pour valeur $\frac{\overline{\mathrm{IH}}^2}{4\mathrm{I}\omega}$. G. BOULLOUD.

2399. Soient α_1 et α_2, β_1 et β_2, γ_1 et γ_2 les milieux des arcs BC, CA, AB du cercle circonscrit à un triangle ABC et α'_1 et α'_2, β'_1 et β'_2, γ'_1 et γ'_2 leurs symétriques par rapport aux côtés BC, CA, AB respectivement. Montrer que les quatre cercles $\alpha'_1\,\beta'_1\,\gamma'_1$, $\alpha'_1\,\beta'_2\,\gamma'_2$, $\beta'_1\,\alpha'_2\,\gamma'_2$, $\gamma'_1\,\alpha'_2\,\beta'_2$ se coupent à l'orthocentre H du triangle ABC. Indiquer les centres et les rayons de ces cercles. V. THÉBAULT.

2400. Des points de contact D, E, F du cercle inscrit I à un triangle ABC, on mène les parallèles $D\beta_1$ et $D\gamma_2$ à BA et AC, $E\gamma_1$ et $E\alpha_2$ à CB et BA, $F\alpha_1$ et $F\beta_2$ à AC et CB.

1° Les droites $\beta_1\gamma_2$, $\alpha_1\beta_2$, $\gamma_1\alpha_2$ rencontrent respectivement CB, BA, AC en trois points d'une droite perpendiculaire à la ligne des centres OI des cercles inscrit et circonscrit;

2° Les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ et $A\alpha_2$, $B\beta_2$, $C\gamma_2$ concourent en deux points K_1 et K_2 qui sont en ligne droite avec le centre du cercle inscrit au triangle ABC et symétriques par rapport à OI.

2401. Soient C et C_1 les premier et second centres de courbure en un point M d'une chaînette d'égale résistance. On projette le milieu P de MC en N sur MC_1 et l'on joint CN. Démontrer que cette droite passe par le troisième centre de courbure de la chaînette en M. F. BALITRAND.

2402. Si l'on joint un point d'une ellipse aux deux sommets situés sur un axe et le point diamétralement opposé aux deux sommets situés sur l'autre axe, les quatre droites ainsi obtenues et les axes de l'ellipse sont six tangentes d'une parabole.

F. BALITRAND.

2403. Soit AA′ un diamètre d'une ellipse rencontrant en M le cercle de Monge de la conique; démontrer que le rayon de courbure en A a pour expression $\rho = \frac{(\mathrm{MA} \times \mathrm{MA}')^{\frac{3}{2}}}{ab}$; a et b étant les demi-axes de l'ellipse. F. BALITRAND.

[R8e]

SUR UNE APPLICATION ÉLÉMENTAIRE D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DONNANT LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME;

Par M. P. APPELL.

I. Pour l'enseignement élémentaire de la dynamique, il ne sera peut-être pas sans intérêt de faire connaître une méthode générale qui permet d'écrire les équations du mouvement d'un point à l'aide de dérivations partielles, et cela dans les hypothèses les plus générales. Le point peut en effet être libre, ou assujetti à glisser sans frottement soit sur une courbe, soit sur une surface pouvant dépendre du temps; il peut être soumis à des liaisons qui s'expriment par des relations différentielles non intégrables; le point peut être rapporté à un système quelconque de coordonnées dont la définition dépend du temps; enfin les paramètres employés pour définir le mouvement peuvent être liés aux coordonnées cartésiennes par des relations différentielles non intégrables (¹).

II. Rappelons d'abord quelques formules tout à fait élémentaires de la Géométrie analytique de l'espace, en axes rectangulaires.

1° Soient a, b, c les coordonnées d'un point libre P et α, β, γ les coordonnées d'un point fixe H. Le carré

(¹) Voir *Comptes rendus*, t. 129, séance du 6 août 1899, p. 317, et P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II.

de la distance des deux points

$$2R = r^2 = (a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2,$$

a évidemment pour minimum *zéro*; les valeurs de a, b, c donnant le minimum sont fournies par les équations

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial c} = 0.$$

2° Supposons que le point P (a, b, c) ne soit plus libre, mais assujetti à rester sur un plan donné

$$(1) \qquad Aa + Bb + Cc + D = 0.$$

La position du point P rendant la distance ΠP, ou son carré 2R, minimum, s'obtient évidemment en abaissant du point Π la perpendiculaire sur le plan. Les coordonnées a, b, c de cette position sont données par l'équation (1) associée aux trois équations

$$(2) \qquad a - \alpha = \lambda A, \qquad b - \beta = \lambda B, \qquad c - \gamma = \lambda C,$$

où λ est un multiplicateur auxiliaire.

D'ailleurs, la valeur de λ correspondant au minimum est

$$\lambda = - \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

On peut aussi écrire les équations (2)

$$(2') \qquad \frac{\partial R}{\partial a} = \lambda A, \qquad \frac{\partial R}{\partial b} = \lambda B, \qquad \frac{\partial R}{\partial c} = \lambda C.$$

3° Supposons enfin que le point P soit assujetti à rester sur une droite définie par les deux équations

$$(3) \qquad \begin{cases} Aa + Bb + Cc + D = 0 \\ A'a + B'b + C'c + D' = 0 \end{cases}$$

Alors le minimum de la distance ΠP ou de son carré

2R est donné par les valeurs de a, b, c correspondant au point où le plan, mené par II perpendiculairement à la droite (3), rencontre cette droite. Les coordonnées a, b, c de ce point sont définies par les équations (3) jointes aux trois relations

$$\begin{aligned} a - \alpha &= \lambda A + \mu A', \\ b - \beta &= \lambda B + \mu B', \\ c - \gamma &= \lambda C + \mu C', \end{aligned}$$

où λ et μ désignent deux multiplicateurs auxiliaires. On peut aussi écrire ces dernières équations

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial a} = \lambda A + \mu A', \qquad \frac{\partial R}{\partial b} = \lambda B + \mu B', \\ &\qquad\qquad \frac{\partial R}{\partial c} = \lambda C + \mu C'. \end{aligned} \right.$$

III. Ces formules étant rappelées, imaginons un point matériel de masse m, de coordonnées x, y, z, en mouvement; distinguons les forces qui agissent sur lui en forces directement appliquées dont la résultante a pour projections X, Y, Z, et en forces de liaison s'il y en a. Appelons $x', y', z', x'', y'', z''$ les dérivées premières et secondes de x, y, z par rapport au temps t. Considérons enfin la quantité

$$R = \frac{m}{2}\left[\left(x'' - \frac{X}{m}\right)^2 + \left(y'' - \frac{Y}{m}\right)^2 + \left(z'' - \frac{Z}{m}\right)^2\right],$$

dont la signification géométrique est simple : si l'on mène à partir de l'origine un vecteur J équipollent à l'accélération et un vecteur $\frac{F}{m}$ équipollent à la force F divisée par la masse, R est, au facteur $\frac{m}{2}$ près, le carré de la distance des extrémités de ces deux vecteurs.

1° Alors, si le point est libre, s'il n'y a aucune liaison,

l'accélération que prend le point à chaque instant est celle qui rend R *minimum*, c'est-à-dire *nul* dans le cas actuel, car on a,

$$m\overrightarrow{J} = \overrightarrow{F}.$$

Les équations du mouvement sont donc, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial R}{\partial x''} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y''} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z''} = 0,$$

2° Si le point n'est pas libre, s'il existe des liaisons imposées au point, l'accélération que prend le point, à un instant quelconque t, est, *parmi toutes les accélérations compatibles avec les liaisons, celle qui rend* R *minimum*. C'est ce que nous allons montrer, en prenant successivement le cas d'un point assujetti à rester sur une surface donnée ou sur une courbe donnée.

Point sur une surface. — Supposons que les coordonnées x, y, z soient liées par une relation donnée

$$(A) \qquad f(x, y, z, t) = 0$$

pouvant contenir le temps. Géométriquement, cela revient à dire que le point est assujetti à glisser *sans frottement* sur la surface (A) qui peut dépendre du temps. En dérivant deux fois la relation (A) par rapport à t, on a

$$f'_x x' + f'_y y' + f'_z z' + f'_t = 0,$$

$$(\Sigma) \qquad f'_x x'' + f'_y y'' + f'_z z'' + f''_{x^2} x'^2 + \ldots = 0,$$

où les termes non écrits ne renferment pas x'', y'', z''. On peut dire que la liaison imposée au point établit à chaque instant entre x'', y'', z'' la relation (Σ). Dès lors, cherchons les valeurs de x'', y'', z'' qui vérifient la relation linéaire (Σ) et qui rendent R minimum. Nous

aurons le problème 2° du n° II, sauf le changement de a, b, c en x'', y'', z'',... Les valeurs cherchées de x'', y'', z'' sont données par

$$\frac{\partial R}{\partial x''} = \lambda f'_x, \; \ldots,$$

ou

$$m x'' - X = \lambda f'_x, \qquad m y'' - Y = \lambda f'_y, \qquad m z'' - Z = \lambda f'_z,$$

λ désignant un coefficient arbitraire. Or, les équations ainsi obtenues sont précisément les équations du mouvement, telles qu'on les écrirait en introduisant la réaction normale de la surface (A), réaction qui a pour projections $\lambda f'_x$, $\lambda f'_y$, $\lambda f'_z$.

La valeur de λ correspondant au minimum donne cette réaction en fonction de x, y, z, x', y', z' et t.

Point sur une courbe. = Si x, y, z vérifient deux relations données

$$\text{(C)} \qquad f(x, y, z, t) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, t)$$

on obtient entre x'', y'', z'' deux relations

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} f'_x x'' + f'_y y'' + f'_z z'' + f''_{x^2} x'^2 + \ldots = 0, \\ \varphi'_x x'' + \varphi'_y y'' + \varphi'_z z'' + \varphi''_{x^2} x'^2 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Les valeurs de x'', y'', z'', rendant R minimum sous les deux conditions linéaires (Γ), sont alors données par

$$\frac{\partial R}{\partial x''} = \lambda f'_x + \mu \varphi'_x, \; \ldots,$$

ou

$$m x'' - X = \lambda f'_x + \mu \varphi'_x,$$
$$m y'' - Y = \lambda f'_y + \mu \varphi'_y,$$
$$m z'' - Z = \lambda f'_z + \mu \varphi'_z;$$

on obtient ainsi les équations classiques du mouve-

ment, la réaction normale de la courbe ayant pour projections $\lambda f'_x + \mu \varphi'_x$, ...

Le principe est ainsi démontré. Il va de soi que, dans son énoncé, on peut remplacer R par toute autre expression qui ne diffère de R que par des termes indépendants de x'', y'', z'', par exemple par

$$R = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (Xx'' + Yy'' + Zz'').$$

On a alors

$$R = \frac{1}{2} m J^2 - FJ \cos \widehat{FJ},$$

où le premier terme est l'énergie d'accélération et le second le produit intérieur de la force F par l'accélération J.

IV. Voici maintenant les conséquences pratiques qu'on peut tirer de ce principe, pour écrire les équations du mouvement.

Point libre. — Prenons un système quelconque de coordonnées q_1, q_2, q_3 liées à x, y, z par des relations connues

$$x = g(q_1, q_2, q_3, t),$$
$$y = h(q_1, q_2, q_3, t),$$
$$z = k(q_1, q_2, q_3, t).$$

Pour trouver x, y, z en fonction de t, il suffit de connaître q_1, q_2, q_3 en fonction de t; or, on a

$$x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} q'_3 + \frac{\partial x}{\partial t},$$
$$x'' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q''_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q''_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} q''_3 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q'^2_1 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

avec des expressions analogues pour y'' et z''.

Formons alors la quantité

$$S = \frac{1}{2} m J^2 = \frac{1}{2} m (x''^2 + y''^2 + z''^2)$$

en y remplaçant x'', y'', z'' par leurs valeurs; nous aurons pour S une fonction du second degré de q''_1, q''_2, q''_3. Formons d'autre part la quantité

$$FJ \cos \widehat{FJ} = Xx'' + Yy'' + Zz'',$$

nous trouverons une expression linéaire en q''_1, q''_2, q''_3, de la forme

$$Q_1 q''_1 + Q_2 Q''_2 + Q_3 q''_3 + \ldots$$

où Q_1, Q_2, Q_3 ont les valeurs classiques

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1}, \ldots,$$

de telle façon que $Q_1 \, \delta q_1$ soit le travail de la force F correspondant au déplacement fictif δx, δy, δz obtenu en laissant q_2, q_3, t constants et faisant varier q_1 de δq_1.

Les équations du mouvement s'obtiendront en cherchant les valeurs de q''_1, q''_2, q''_3 qui caractérisent l'accélération, de façon que

$$R = S - (Q_1 q''_1 + Q_2 q''_2 + Q_3 q''_3) + \ldots$$

soit *minimum*. On devra donc écrire

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial q''_2} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial q''_3} = 0,$$

ou

$$(4) \quad \frac{\partial S}{\partial q''_1} - Q_1 = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_2} - Q_2 = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_3} - Q_3 = 0,$$

Point sur une surface. — Supposons que x, y, z soient liés par une relation donnée

$$(A) \qquad f(x, y, z, t) = 0.$$

On pourra toujours exprimer les coordonnées x, y, z vérifiant cette équation en fonction de deux coordonnées q_1 et q_2 par des formules

$$x = g(q_1, q_2, t), \qquad y = h(q_1, q_2, t), \qquad z = k(q_1, q_2, t),$$

de telle façon que l'élimination de q_1 et q_2 conduit à l'équation (A). Les composantes de l'accélération du point sont alors données par

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q''_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q''_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q'^2_1 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

Elles dépendent de q''_1 et q''_2 : en donnant à q''_1, q''_2 toutes les valeurs possibles, on aurait toutes les accélérations x'', y'', z'' compatibles avec la condition (A). Dans ce cas, l'énergie d'accélération

$$S = \frac{1}{2} m (x''^2 + y''^2 + z''^2)$$

devient une fonction du second degré de q''_1, q''_2; puis $Xx'' + Yy'' + Zz''$ devient une fonction linéaire

$$Q_1 q''_1 + Q_2 q''_2 + \ldots$$

de q''_1, q''_2. Les équations du mouvement s'obtiennent en cherchant les valeurs de q''_1 et q''_2 qui rendent R minimum : elles sont

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial q''_2} = 0,$$

ou

$$(5) \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_1} - Q_1 = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_2} - Q_2 = 0.$$

Exemple. — *Un plan parfaitement poli passe par un axe horizontal fixe* Ox, *autour duquel il tourne avec une vitesse angulaire constante* ω : *trouver le mouvement d'un point pesant assujetti à glisser sans frottement sur ce plan.*

Soient Oy et Oz deux autres axes perpendiculaires à Ox, Oy horizontal, Oz vertical ascendant. Le plan mobile a pour équation.

$$y \sin \omega t - z \cos \omega t = 0$$

On peut, dans le plan, définir la position d'un point par deux paramètres q_1 et q_2 en posant

$$x = q_1, \qquad y = q_2 \cos \omega t. \qquad z = q_2 \sin \omega t,$$

où q_2 est le rayon vecteur de la projection du mobile sur le plan yOz. Calculant x'', y'', z'', on voit que

$$S = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2 + z''^2) = \frac{m}{2}[q_1''^2 + q_2''^2 - 2\omega^2 q_2 q_2''] + \ldots,$$

les termes non écrits ne contenant ni q_1'' ni q_2''. D'autre part, la seule force donnée étant le poids, on a

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -mg,$$

d'où l'on déduit

$$Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0,$$

$$Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1} = -mg \sin \omega t$$

Les équations du mouvement (5) sont alors

$$q_1'' = 0, \qquad q_2'' - \omega^2 q_2 = -g \sin \omega t,$$

d'où en intégrant

$$q_1 = x = x_0 + x'_0 t,$$

$$q_2 = r_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} + C\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t$$

où

$$r'_0 = C\omega + \frac{g}{2\omega},$$

x_0 et r_0 désignant les valeurs initiales ($t = 0$) de q_1 et q_2, x'_0 et r'_0 les valeurs initiales de leurs dérivées.

Point sur une courbe. — Dans ce cas, on peut faire choix d'un paramètre q sur la courbe et exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en posant

$$x = g(q, t), \qquad y = h(q, t), \qquad z = k(q, t),$$

d'où

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial q} q'' + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} q'^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} q' + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \qquad \ldots$$

et pour y'', z'' des expressions analogues.

Pour déterminer les composantes x'', y'', z'', de l'accélération compatibles avec la liaison, il suffit de connaître q''. Portant dans S, on voit que S devient une fonction du second degré de q''. Puis, portant ces valeurs dans FJ cos $\widehat{\mathrm{FJ}}$, on voit que

$$X x'' + Y y'' + Z z'' \equiv Q q'' + \ldots,$$

où

$$Q = X \frac{\partial x}{\partial q} + Y \frac{\partial y}{\partial q} + Z \frac{\partial z}{\partial q},$$

de telle façon que $Q\,\delta q$ soit le travail élémentaire de F pour un déplacement fictif δx, δy, δz obtenu en laissant t constant et faisant croître q de δq. L'équation unique du mouvement est alors

$$(6) \qquad \frac{\partial S}{\partial q''} = Q.$$

Exemple. — *Régulateur à force centrifuge. — Une circonférence de rayon* a *tourne avec une vitesse angulaire constante* ω *autour d'un diamètre vertical fixe* Oz; *mouvement d'un point pesant glissant sans frottement sur la circonférence.*

Soient O le centre de la circonférence, Oz la verticale descendante, Ox et Oy deux axes horizontaux rectangulaires. Prenons comme paramètre q l'angle du

rayon OM, allant au point mobile M, avec Oz. On a

$$x = a \sin q \cos \omega t, \qquad y = a \sin q \sin \omega t, \qquad z = a \cos q$$

d'où, en dérivant deux fois,

$$S = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2 + z''^2) = \frac{m a^2}{2}[q''^2 - 2\omega^2 \sin q \cos q \, q''] + \ldots,$$

les termes non calculés ne contenant pas q''_2. D'autre part,

$$Q = X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} = -\, mga \sin q.$$

L'équation du mouvement est donc

$$q'' - \omega^2 \sin q \cos q = -\frac{g}{a}\sin q,$$

facile à intégrer par quadratures. Les positions d'équilibre relatif sont données par les valeurs de q pour lesquelles $q'' = 0$.

V. La forme des équations indiquées ci-dessus s'applique également quand q_1, q_2,... ne sont plus de véritables coordonnées, mais sont liés à x, y, z par des relations différentielles du premier ordre non intégrables, ou encore quand le point x, y, z est assujetti à des liaisons non exprimables en termes finis. C'est ce que je pense exposer dans un autre article.

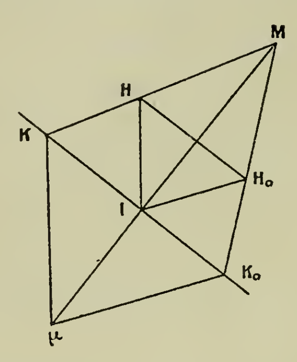
[O¹8a]

SUR LES CENTRES DE COURBURE DES LIGNES DÉCRITES PAR LES POINTS D'UNE FIGURE PLANE MOBILE DANS SON PLAN;

PAR M. M. D'OCAGNE.

La construction classique de Savary permet de déterminer ces centres de courbure lorsque l'on connaît les

centres de courbure de la base et de la roulante au moyen desquelles le mouvement de la figure mobile peut être engendré; mais, en général, ce mouvement n'est pas défini de la sorte; il l'est, plus ordinairement, par les trajectoires de deux des points de cette figure.



La question se pose dès lors, si l'on connaît les centres de courbure répondant à ces deux points, de construire celui qui correspond à tout autre point de la figure mobile.

D'élégantes solutions de ce problème ont été données naguère par M. Farid Boulad dans les *Nouvelles Annales* (1908, p. 128). En voici une qui pourra paraître un peu plus simple. Elle se déduit du théorème suivant qui se trouve démontré dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 274):

Il existe sur la normale commune à la base et à la roulante, issue du centre instantané I, *un point* H (c'est le point conjugué du centre de courbure de la base par rapport au cercle de courbure de la roulante) *tel que la droite qui joint un point quelconque* M *de la figure mobile à ce point* H *passe par le point de rencontre de la perpendiculaire élevée en* I *à la*

normale MI *et de la parallèle à* IH *menée par le centre de courbure* μ *répondant à* M.

Il suffit donc de connaître ce point H (*fig.* 1) pour que s'ensuive la détermination du centre de courbure μ répondant à tout point M, et, par suite, toute la question revient à déduire ce point H des centres de courbure μ et μ' répondant à deux points M et M'.

Or, pour trouver le lieu du point H correspondant à un centre de courbure donné, il suffit de remarquer que la parallèle à IK menée par H est homothétique de cette droite IK par rapport à M, le rapport d'homothétie étant $\frac{MI}{M\mu}$. Si donc on tire par μ une droite quelconque μK_0 qui coupe en K_0 la perpendiculaire IK à MI, et que l'on mène par I la parallèle IH_0 à μK_0, qui coupe MK_0 en H_0, le point H se trouve sur la perpendiculaire abaissée de H_0 sur MI.

Procédant de même avec le centre de courbure μ' donné sur la normale M'I, on obtient de la sorte une seconde droite passant par H, et ce point se trouve déterminé.

Afin de réduire le nombre des lignes à tracer, on peut faire un choix judicieux des droites μK_0 et $\mu' K_0$ menées *arbitrairement* par μ et par μ'. On peut les faire coïncider toutes deux avec $\mu\mu'$. Mais le choix comportant la plus grande simplicité de tracé semble consister à prendre μK_0 et $\mu' K'_0$ respectivement perpendiculaires à M'I et MI.

Il convient de remarquer que, si le point M passe par une inflexion sur sa trajectoire, la droite HH_0 passe par M et, par suite, que, dans ce cas, le lieu correspondant du point H est tout simplement la tangente en M à cette trajectoire. Cela montre, au reste, que le lieu de ces points d'inflexion est le cercle décrit sur IH

comme diamètre, ce qui, comme nous en faisons la remarque dans notre *Cours* (p. 275), est une manière très simple de retrouver géométriquement un théorème bien connu dû à Bresse.

[I1]

SUR L'EXTRACTION, A UNE UNITÉ PRÈS, DE LA RACINE $m^{\text{ième}}$ D'UN NOMBRE QUELCONQUE A L'AIDE DES LOGARITHMES;

Par M. P. DELENS.

Lorsqu'on a à extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre quelconque, on a généralement recours aux logarithmes, et si le nombre donné contient beaucoup de chiffres, comme il n'est pas possible d'obtenir la valeur exacte du logarithme qui lui correspond, on forme d'ordinaire celle d'un nombre s'en rapprochant le plus possible en prenant dans le nombre considéré autant de chiffres qu'on le peut, afin que l'erreur du résultat trouvé soit très faible.

Il est cependant facile de montrer que si l'on veut simplement calculer la racine $m^{\text{ième}}$, *à une unité près*, d'un nombre très grand (ce qui suffit pour la trouver ensuite avec une approximation quelconque), on peut d'ordinaire considérer le logarithme d'un autre nombre ayant avec le premier un très petit nombre de chiffres communs, sans altérer le résultat, ce qui permet ainsi d'abréger sensiblement le calcul. Nous allons, pour le démontrer, établir la règle suivante, peut-être nouvelle sous cette forme, qui repose sur une remarque très simple :

Pour extraire à une unité près la racine $m^{\text{ième}}$,

contenant k chiffres, d'un nombre quelconque, on peut considérer le nombre formé en conservant les k premiers chiffres de gauche du nombre donné et en remplaçant tous les autres par des zéros; la racine $m^{ième}$ entière du nombre ainsi obtenu, calculée au moyen des logarithmes, donne la solution cherchée.

La valeur maximum du nombre k des chiffres de la racine dépend de l'étendue des tables de logarithmes que l'on emploie; elle est égale à 5 avec les tables ordinaires à 7 décimales, qui donnent les logarithmes des nombres de 1 à 100000; à 4 ou à 3, si l'on se sert des tables à 5 ou à 4 décimales, qui fournissent ceux des nombres de 1 à 10000, ou à 1000; enfin, si $k = 2$ ou $k = 1$, on peut avoir recours simplement à la règle à calcul pour former les logarithmes.

La démonstration de la règle énoncée plus haut peut se faire de la façon suivante :

Soit N le nombre donné; supposons que sa racine m^{ieme} entière ait k chiffres. Nous pouvons toujours écrire

$$N = A \times 10^p + B,$$

ce qui nous donnera les inégalités

$$\log A \times 10^p \leqq \log N < \log(A+1)\,10^p$$

ou encore

$$\frac{\log A \times 10^p}{m} \leqq \frac{\log N}{m} < \frac{\log(A+1)10^p}{m}.$$

Si nous prenons maintenant p de telle sorte que le nombre des chiffres de A soit précisément égal à k, et si nous employons les tables donnant les logarithmes des nombres de 1 à 10^k au moins, nous voyons qu'en posant

$$\log N = \log A \times 10^p + \alpha.$$

α sera la partie du logarithme de N qui proviendra de la partie B laissée de côté dans ce nombre; d'ailleurs, α est évidemment inférieur à la différence tabulaire Δ correspondant à $\log A$, d'après les inégalités primitives. Nous en déduirons

$$\log \sqrt[m]{N} = \frac{\log N}{m} = \frac{\log A \times 10^p}{m} + \frac{\alpha}{m};$$

par suite, si $\frac{\Delta}{m}$ est inférieur à la différence tabulaire Δ' correspondant à $\frac{\log A \times 10^p}{m}$, comme cela a bien lieu d'ordinaire, il en sera de même *a fortiori* de $\frac{\alpha}{m}$, et les k premiers chiffres du nombre trouvé dans la table pour la valeur de $\frac{\log A \times 10^p}{m}$ correspondront évidemment à la racine cherchée de N approchée à une unité près.

Il sera bon toutefois de prendre souvent ce nombre de telle sorte que la mantisse correspondante de la table, si elle n'est pas égale exactement à la mantisse trouvée, en soit approchée plutôt par excès que par défaut, afin de tenir compte de l'inégalité

$$\frac{\log N}{m} \geqq \frac{\log A \times 10^p}{m}$$

et d'avoir ainsi une valeur plus exacte de la racine, qui pourra même être, dans cette manière d'opérer, approchée par excès. Il est facile d'ailleurs de déterminer plus complètement encore la valeur de cette racine en se reportant aux inégalités fondamentales établies plus haut et en calculant le nombre qui correspond à $\frac{\log(A+1)10^p}{m}$, qui est supérieur à $\sqrt[m]{N}$, et qui ne doit pas cependant différer de plus d'une unité de la valeur déjà obtenue.

En résumé, on voit que, pour obtenir par ce procédé la racine $m^{\text{ième}}$ à une unité près d'un nombre donné N, il suffit de connaître :

1° *Le nombre exact des chiffres du nombre* N ;

2° *Les k premiers chiffres (à gauche) de ce nombre, si la racine cherchée doit avoir k chiffres.*

On peut appliquer la règle que nous venons d'indiquer à la recherche des racines $m^{\text{ièmes}}$ suivantes, à une unité près, de nombres dont les chiffres arbitrairement choisis sont remplacés par des points :

1° Racine 196e du nombre de 62 chiffres : 3...;
2° Racine 19e du nombre de 55 chiffres : 162...;
3° Racine 11e du nombre de 45 chiffres : 29108....

Les racines cherchées, à une unité près par défaut, sont 2, 713 et 11020. La première ayant un seul chiffre, il suffira pour la trouver de connaître les logarithmes des dix premiers nombres avec deux décimales; la seconde, ayant trois chiffres, pourra s'obtenir en se servant d'une table de logarithmes à quatre décimales; pour la troisième, il faudra avoir recours à une table à sept décimales puisqu'elle a cinq chiffres.

[K'2e]

SUR L'ORTHOPOLE;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Soient

$$\frac{a(1-t_i^2)}{1+t_i^2}, \qquad \frac{2bt_i}{1+t_i^2} \qquad (i=1,2,3)$$

les coordonnées de trois points A_1, A_2, A_3 d'une

ellipse E. Appelons B_1, B_2, B_3 les milieux des côtés du triangle $A_1A_2A_3$; les coordonnées de B_1 s'écriront

$$a\,\frac{1-t_2^2t_3^2}{(1+t_2^2)(1+t_3^2)},\qquad b\,\frac{(t_2+t_3)(1+t_2t_3)}{(1+t_2^2)(1+t_3^2)}$$

et celles de B_2, B_3 auront des expressions analogues. Soient encore P_a et P_b les orthopôles du grand axe et du petit axe de E par rapport au triangle $B_1B_2B_3$. Le point P_a étant à l'intersection des perpendiculaires à B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 menées par les projections de B_1, B_2, B_3 sur le grand axe de E, ses coordonnées (ξ_a, η_a) s'obtiennent en résolvant le système

$$y=\frac{a(t_2+t_3)}{b(1-t_2t_3)}\left[x-a\,\frac{1-t_2^2t_3^2}{(1+t_2^2)(1+t_3^2)}\right],$$
$$y=\frac{a(t_3+t_1)}{b(1-t_3t_1)}\left[x-a\,\frac{1-t_3^2t_1^2}{(1+t_3^2)(1+t_1^2)}\right]$$

et s'écrivent par conséquent

$$\xi_a=a\,\frac{(1-t_2t_3)(1-t_3t_1)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)},$$
$$\eta_a=-\frac{a^2}{b}\,\frac{(t_2+t_3)(t_3+t_1)(t_1+t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}.$$

Or les coordonnées ξ_ω, η_ω du centre ω du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ ont pour valeurs

$$\xi_\omega=\frac{c^2}{a}\,\frac{(1-t_2t_3)(1-t_3t_1)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)},$$
$$\eta_\omega=-\frac{c^2}{b}\,\frac{(t_2+t_3)(t_3+t_1)(t_1+t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}.$$

Il s'ensuit que les points P_a et ω sont en ligne droite avec le centre O de l'ellipse E et qu'on a

$$\omega O : \omega P_a=\frac{c^2}{a^2};$$

on a donc aussi, par analogie,

$$\omega O : \omega P_b = -\frac{c^2}{b^2}.$$

On obtient ainsi ce théorème :

Les orthopôles des axes d'une conique circonscrite à un triangle $A_1A_2A_3$, *par rapport au triangle formé par les milieux des côtés, sont en ligne droite avec le centre de la conique et le centre du cercle circonscrit au triangle et sont symétriques par rapport au milieu du segment compris entre ces deux centres.*

Le centre du cercle $A_1A_2A_3$ *divise le segment compris entre les deux orthopôles en segments inversement proportionnels aux carrés des axes correspondants.*

Dans le cas de la parabole cette proposition prend la forme suivante :

L'orthopôle de l'axe d'une parabole circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$, *par rapport au triangle des milieux des côtés appartient au diamètre de la parabole passant par le centre du cercle* $A_1A_2A_3$.

Quand la conique considérée est une hyperbole équilatère, les orthopôles P_a et P_b sont confondus au milieu de $O\omega$.

En considérant le cas où la conique est un cercle, on trouve cette propriété facile à établir directement :

Dans un triangle les orthopôles de deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre sont symétriques par rapport à ce point.

2. Le théorème énoncé ci-dessus fournit une solu-

tion du problème qui consiste à déterminer le centre et la nature de la conique définie par trois points A_1, A_2, A_3 et l'un de ses axes Δ. Il suffit de construire l'orthopôle P de Δ par rapport au triangle formé par les milieux des côtés de $A_1A_2A_3$. Le diamètre ωP du cercle $A_1A_2A_3$ passe par le centre cherché O et la conique sera une ellipse si P est extérieur à $O\omega$, une hyperbole si P est intérieur à $O\omega$, une parabole si OP est parallèle à Δ. D'ailleurs si P' désigne le symétrique de P par rapport au milieu de $O\omega$, le rapport $P\omega : \omega P'$ fera connaître le carré du rapport des axes.

De la construction précédente il résulte que, si l'un des axes d'une conique circonscrite à un triangle passe par un point fixe, le centre décrit en général une cubique ; si le point fixe appartient à l'un des côtés du triangle des milieux des côtés, ou est à l'infini, ou appartient au cercle des neuf points, le lieu considéré est une conique. On voit de même que, si le centre d'une conique circonscrite à un triangle décrit un diamètre du cercle circonscrit, ses axes enveloppent la parabole qui est conjuguée au triangle et a ce diamètre pour directrice.

[C2h]

SUR QUELQUES INTÉGRALES TRIGONOMÉTRIQUES;

Par M. M.-F. EGAN.

---

1. Pour mettre en évidence le caractère élémentaire de ce qui va suivre, je rappelle ici la démonstration

que j'ai donnée ailleurs ([1]) de la formule classique

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

On constate sans peine que l'intégrale existe et qu'elle est la limite de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{x^2}\,dx = \frac{1}{n}\,\mathrm{I}_n,$$

lorsque l'entier positif n tend vers l'infini.

Or, I_n est comprise entre

$$\mathrm{S}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx = n\,\frac{\pi}{2}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nx \cot^2 x\,dx \\ &= \mathrm{S}_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nx\,dx \\ &= n\,\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

d'où la limite cherchée.

2. On a donc, r étant un entier positif,

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos rx}{x^2}\,dx = r\pi = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos rx}{1-\cos x}\,dx.$$

Soit $\varphi(x)$ un polynome en $\cos x$, s'annulant pour $x = 0$; on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_r a_r(1-\cos rx),$$

d'où

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^2} = \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x)}{1-\cos x}\,dx.$$

([1]) *Mathematical Gazette*, 1916.

Intégrons le second membre par parties. L'origine est un zéro d'ordre 2 pour $\varphi(x)$, donc le terme intégré s'annule aux limites, et il reste

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx = \int_0^{\pi} \varphi'(x) \cot \frac{1}{2} x \, dx. \tag{3}$$

3. Ainsi, par exemple, si p et q sont des entiers positifs, dont q peut être nul, on a

$$\begin{aligned} F(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2p} x \cos^q x}{x^2}\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2p} x \cos^q x}{1 - \cos x}\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^{2p-2} x (\cos^q x + \cos^{q+1} x)\, dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^{\pi} \sin^{2a} x \cos^{2b} x \, dx = \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a + b + 1)},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^{2a} x \cos^{2b+1} x \, dx = 0,$$

donc

$$F(p, 2m - 1) = F(p, 2m) = \frac{\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m + p)}. \tag{4}$$

Soit encore

$$\varphi(x) = 1 - \cos^n x,$$

et appliquons la formule (3). On a [1]

$$\begin{aligned} C(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos^n x}{x^2}\, dx \\ &= n \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin x \cot \frac{1}{2} x \, dx \\ &= n \int_0^{\pi} (\cos^{n-1} x + \cos^n x)\, dx, \end{aligned}$$

---

[1] Pour cette intégrale, *voir* le travail de T. Stefan, *Zeitschrift für Math. u. Phys.* (Schlömilch), Band VII, t. 1862, p. 356.

d'où

$$(5)\quad \begin{cases} C(n) = n \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)} & (n \text{ pair}), \\[2ex] C(n) = n \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

Posons encore

$$\varphi(x) = p - \frac{\sin px}{\sin x}.$$

On a facilement

$$\varphi'(x) \cot \frac{1}{2} x + \frac{\varphi(x)}{1-\cos x} = p \frac{1-\cos px}{1-\cos x} - \frac{\sin px}{\sin x},$$

d'où, par les identités (2) et (3),

$$\begin{aligned} G(p) &= \int_{\infty}^{\infty} \left(p - \frac{\sin px}{\sin x}\right) \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} p \int_0^{\pi} \frac{1-\cos px}{1-\cos x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin px}{\sin x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} p^2 - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin px}{\sin x} dx, \end{aligned}$$

on a donc

$$(6)\quad \begin{cases} G(p) = \dfrac{\pi}{2} p^2 & (p \text{ pair}), \\[2ex] G(p) = \dfrac{\pi}{2} (p^2 - 1) & (p \text{ impair}). \end{cases}$$

4. Mettons $px = y$ dans (6), il en vient

$$H(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin y}{p \sin \dfrac{y}{p}}\right) \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{p^2}\right),$$

ε ayant la valeur 0 ou 1 suivant le cas. On conjecture

qu'on doit avoir

$$(7) \qquad \Pi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin y}{y}\right) \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $\Pi - \Pi(p)$ tend vers zéro avec $1 : p$, mais il est plus simple de déduire (7) de l'égalité

$$\int_\alpha^\beta \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \left[\frac{x - \sin x}{x^2}\right]_\alpha^\beta + 2 \int_\alpha^\beta \frac{x - \sin x}{x^3} dx,$$

en faisant tendre β et α vers ∞ et $-\infty$.

5. Jusqu'ici les nombres p, q, m, n sont supposés entiers. On peut lever cette restriction des formules (4) et (5), mais non pas de (6). Soit en effet $\varphi(x)$ une fonction paire, de période 2π, ayant une racine double à l'origine, et telle que la série

$$S(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{2\varphi(x)}{(x + 2r\pi)^2} = \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x}$$

puisse s'intégrer terme à terme de 0 à 2π. On peut remplacer les deux dernières conditions, si l'on veut, par celle plus simple quoique plus restrictive que $\varphi(x) : x^2$ soit bornée. Alors

$$\varphi(2\pi - x) = \varphi(x - 2\pi) = \varphi(x),$$

d'où

$$(8) \qquad \int_0^\pi \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} S(x)\, dx$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)}{(x + 2r\pi)^2} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx.$$

Il s'ensuit que les identités (2) et (3) sont encore valables. En examinant les démonstrations de (4) et (5), on constate que p, q, m, n *peuvent être des fractions positives à dénominateurs impairs*. Il faut toutefois que $p \geqq 1$ dans (4), et que $n \geqq 1$ dans (5).

Wolstenholme [1] donne l'énoncé

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} f(\sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\, dx,$$

qui équivaut à (8).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1710.

(1896, p. 56; 1917, p. 244.)

Une série de bougies, de compositions et de hauteurs différentes, sont posées verticalement sur une table et allumées au même instant. Démontrer : 1° que généralement le centre de gravité du système formé par les bougies décrit une série d'arcs d'hyperboles successives ; 2° qu'à un instant quelconque l'hyperbole correspondante a une asymptote verticale qui passe par le centre de gravité primitif des parties consumées des bougies qui brûlent encore à l'instant considéré. WALTON.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient α_i, β_i, O les coordonnées des points P_i où sont posées

(1) *Mathematical Problems*, 1919 (23), p. 332, 2e édition (1878).

les bougies B_i de longueurs l_i, μ_i les masses par unité de longueur des bougies; pendant le temps t la longueur de la bougie B_i est réduite de $\lambda_i t$, λ_i étant un coefficient dépendant de la composition de la bougie B_i, supposée homogène. Les centres de gravité des bougies ont pour coordonnées

$$\alpha_i, \quad \beta_i, \quad \frac{1}{2}\left(l_i - \lambda_i t\right)$$

et sont affectés de masses $\lambda_i(l_i - \lambda_i t)$. Les coordonnées du centre de gravité G du système formé par les bougies sont donc

$$x = \frac{\Sigma \alpha_i l_i \mu_i - t \Sigma \alpha_i \lambda_i \mu_i}{\Sigma l_i \mu_i - t \Sigma \lambda \mu_i}, \qquad y = \frac{\Sigma \beta_i l_i \mu_i - t \Sigma \beta_i \lambda_i \mu_i}{\Sigma l_i \mu_i - t \Sigma \lambda_i \mu_i},$$

$$z = \frac{t^2 \Sigma \mu_i \lambda_i^2 - 2t \Sigma l_i \lambda_i \mu_i + \Sigma \mu_i l_i^2}{2(\Sigma l_i \mu_i - t \Sigma \lambda_i \mu_i)};$$

les signes sommatoires s'étendent à toutes les bougies qui brûlent encore à l'instant t, et les sommes qu'ils représentent changent quand t prend une des valeurs $l_i : \lambda_i$. Les équations paramétriques qui précèdent montrent que le lieu de G se compose de coniques. Considérons celle relative à un intervalle compris entre deux valeurs consécutives de $l_i : \lambda_i$. Quand le paramètre est infini, z est infini et les expressions de x et y s'écrivent.

$$\frac{\Sigma \alpha_i \lambda_i \mu_i}{\Sigma \lambda_i \mu_i}, \qquad \frac{\Sigma \beta_i \lambda_i \mu_i}{\Sigma \lambda_i \mu^i};$$

ce sont les coordonnées de la projection, sur le plan xy, du centre de gravité primitif γ des parties consumées des bougies qui brûlent encore pendant l'intervalle considéré, puisque le centre de gravité primitif de la partie consumée de B_i était affecté de la masse $\mu_i \lambda_i t$. Par conséquent, pour les valeurs de t comprises entre deux valeurs consécutives de $l_i : \lambda_i$, G décrit une hyperbole dont une asymptote est la verticale menée par le point γ correspondant.

Autres solutions, de MM. H. Brocard, P. Carissan et P. Faucheux. — M. Brocard fait très justement remarquer qu'ici le zéro caractérise une discontinuité, et non une transition; et que c'est probablement ce fait qui a retardé si longtemps la solution.

1721.

(1896, p. 152; 1917, p. 214.)

Déterminer un polynome entier du degré n, $f'_n(x)$, tel que le résidu de la fonction

$$f'_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{m-1}}{1-x^m} \qquad (m \text{ nombre entier positif})$$

relatif au point $x = 0$ soit égal à zéro quand m et n sont différents, et à l'unité quand $m = n$. J. Franel.

Solution

Par M. L. Varchon.

I. Développons, autour du point $x = 0$, la fonction $\dfrac{x^{m-1}}{1-x^m}$. On a

$$(1-x^m)^{-1} = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \ldots + x^{(k-1)m} + \ldots$$

et

$$\frac{x^{m-1}}{1-x^m} = x^{m-1} + x^{2m-1} + x^{3m-1} + \ldots + x^{km-1} + \ldots,$$

ces développements sont valables dans le cercle de rayon 1, autour du point $x = 0$. On a, d'autre part,

$$f'_n\left(\frac{1}{x}\right) = A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \ldots + \frac{A_n}{x^n}.$$

Le terme de moindre degré dans le développement de $f'_n\left(\frac{1}{x}\right)\dfrac{x^{m-1}}{1-x^m}$ est $A_n x^{m-n-1}$. Pour que le point $x = 0$ soit un pôle, il faut que le degré de ce terme soit au plus égal à -1. On doit donc avoir

$$m - n - 1 \leqq -1 \qquad \text{ou} \qquad m \leqq n.$$

Si nous faisons $m = n$, le développement de la partie infinie se réduit à $\dfrac{A_n}{x}$; donc $A_n = 1$.

Pour déterminer les autres coefficients, nous donnerons à m successivement les valeurs $n-1$, $n-2$, ... 1. En écri-

vant chaque fois que le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement est nul, nous aurons $n-1$ équations de la forme

$$(1) \qquad A_m + A_{2m} + A_{3m} + \ldots = 0,$$

qui nous permettront de déterminer les $n-1$ coefficients $A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}, \ldots, A_1$; car, chaque équation du système renfermant une nouvelle inconnue qui n'entre dans aucune des précédentes, le déterminant se réduit à son terme principal qui, dans ce cas, est l'unité.

Nous avons ainsi un système d'équations linéaires qui dans chaque cas particulier nous permettra de calculer les coefficients du polynome $f'_n(x)$.

Nous allons maintenant aborder la résolution du système des équations (1) dans le cas le plus général.

II. Considérons d'abord les valeurs de m qui ne divisent pas n; les équations correspondantes ne renfermeront pas A_n ni aucun des coefficients dont l'indice soit diviseur de n. Si N est le nombre des diviseurs de n, nous aurons ainsi un système de $n-N$ équations linéaires et homogènes, distinctes puisqu'elles font partie du système considéré au paragraphe I, pour déterminer les $n-N$ coefficients correspondants; donc ces $n-N$ coefficients sont nuls.

III. Il nous reste à déterminer les coefficients A_m dont l'indice m est diviseur de n. Considérons d'abord les valeurs de m telles que $\frac{n}{m} = \alpha$ soit un nombre premier. Désignons par D_α une telle valeur; on a $\frac{n}{\alpha} = D_\alpha$, et l'équation (1) devient

$$A_{D_\alpha} + A_{2D_\alpha} + A_{3D_\alpha} + \ldots + A_{(\alpha-1)D_\alpha} + A_n = 0,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte des résultats du paragraphe II,

$$A_{D_\alpha} + A_n = 0,$$

d'où

$$A_{D_\alpha} = -1 = (-1)^1.$$

Faisons maintenant $m = D_{\alpha\beta}$, en désignant par $D_{\alpha\beta}$ le quotient de n par le produit de ses deux diviseurs premiers α et β. $D_{\alpha\beta}$ est le plus grand commun diviseur des nombres D_α

et D_β; en tenant compte des résultats du paragraphe II, l'équation (1) peut alors s'écrire

$$A_{D_{\alpha\beta}} + A_{D_\alpha} A_{D_\beta} A_n = 0,$$

d'où

$$A_{D_{\alpha\beta}} = 1 = (-1)^2.$$

Appelons, pour plus de simplicité, « diviseur principal d'ordre k », le quotient de n par le produit de k facteurs premiers différents. Nous venons de voir que les coefficients dont l'indice est diviseur principal du premier ordre sont égaux à $(-1)^1$, que ceux dont l'indice est diviseur principal du deuxième ordre sont égaux à $(-1)^2$; la loi est générale et les coefficients dont l'indice est diviseur principal d'ordre k sont égaux à $(-1)^k$; pour le montrer, il suffit d'établir que si la loi est vraie pour $k = p - 1$, elle est vraie pour $k = p$.

Soit donc

$$D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \frac{n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$$

un diviseur principal d'ordre p; il est facile de voir que $D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ est diviseur d'autant de diviseurs principaux d'ordre q, qu'il y a de combinaisons q à q des p lettres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, soit C_q^p.

En faisant $m = D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ dans l'équation (1), et en remplaçant les coefficients connus par leurs valeurs on obtient

$$(2)\quad A_{D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}} + C_p^{p-1}(-1)^{p-1} + C_p^{p-2}(-1)^{p-2} + \ldots + C_p^q(-1)^q + \ldots + C_p^2(-1)^2 + C'_p(-1) = 0.$$

Or on a

$$(-1)^p + C_p^{p-1}(-1)^{p-1} + C_p^{p-2}(-1)^{p-2} + \ldots + C_p^q(-1)^q + \ldots + C_p^2(-1)^2 + C'_p(-1) = [(-1)+1]^p = 0,$$

d'où

$$A_{D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}} = (-1)^p.$$

IV. Il nous reste à considérer le cas des diviseurs de n qui ne sont pas des diviseurs principaux; soit d un tel diviseur. Considérons le quotient $\frac{n}{d}$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ tous ses diviseurs premiers distincts. d divise alors le diviseur prin-

cipal d'ordre p, $D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, et c'est le seul diviseur principal d'ordre p qu'il divise.

Supposons d'abord que le quotient de $D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ par d soit un nombre premier α_1 par exemple. En faisant $m = d$ dans l'équation (1), on aura au premier membre : le coefficient A_d, puis des coefficients dont l'indice est le produit de d par un multiple de α_1 et dont la somme est nulle en vertu de l'équation (2); puis des coefficients dont l'indice est le produit de d par les diviseurs du produit $\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_p$, ce qui revient au même, le quotient par α_1 d'un diviseur principal d'ordre inférieur à p; enfin nous aurons d'autres coefficients qui seront tous nuls en vertu du paragraphe II.

Nous sommes donc amenés à considérer le cas où $d = d_\lambda$ ne divise que des diviseurs principaux d'ordre inférieur à p et finalement le cas où il ne divise qu'un diviseur principal du premier ordre, D_α par exemple.

On a alors

$$d_\lambda = \frac{D_\alpha}{\alpha^\lambda}.$$

Si nous faisons successivement $\lambda = 1, 2, 3\ldots$ et que nous portions les valeurs obtenues dans l'équation (1), nous aurons, en tenant compte des résultats connus :

$$A_{d_1} + A_{D_\alpha} + A_n = 0, \qquad \text{d'où} \qquad A_{d_1} = 0;$$
$$A_{d_2} + A_{d_1} + A_{D_\alpha} + A_n = 0, \qquad \text{»} \qquad A_{d_2} = 0;$$
$$A_{d_3} + A_{d_2} + A_{d_1} + A_{D_\alpha} + A_n = 0, \qquad \text{»} \qquad A_{d_3} = 0,$$

et d'une façon générale $A_{d_\lambda} = 0$.

Admettons maintenant que le coefficient A_m soit nul pour toute valeur de m, non diviseur principal, mais qui divise un diviseur principal d'ordre $(p-1)$ au plus. Le coefficient A_d, considéré plus haut, où d est le quotient d'un diviseur principal d'ordre p, par un nombre premier, est évidemment nul.

De même si nous considérons le diviseur d' quotient d'un diviseur principal d'ordre p par le produit de deux nombres premiers, différents ou non, et si nous faisons $m = d'$ dans l'équation (1), nous aurons au premier membre: le terme $A_{d'}$, puis des coefficients dont l'indice est le diviseur principal considéré ou ses multiples et dont la somme est nulle; enfin des termes qui sont tous nuls, soit parce que l'indice est le quo-

tient d'un diviseur principal d'ordre p par un nombre premier; ou que cet indice ne divise que des diviseurs principaux d'ordre inférieur à p, soit parce que ce sont des termes considérés au paragraphe II. Donc

$$A_{d'} = 0.$$

On voit alors facilement comment on peut démontrer de proche en proche que tout coefficient dont l'indice est un diviseur non principal de n est nul.

En résumé le polynome $f'_n(x)$ sera déterminé de la façon suivante : tout coefficient dont l'indice est égal au quotient de n par le produit de p de ses facteurs premiers, ces facteurs premiers étant tous différents, est égal à $(-1)^p$; tous les autres coefficients sont nuls, à l'exception de A_0 qui est arbitraire.

En particulier, si n est premier, on ne peut avoir que $p = 0$ ou $p = 1$, ce qui donne, pour $p = 0$,

$$A_n = 1,$$

pour $p = 1$,

$$A_1 = -1$$

et

$$f'_n(x) = x^n - x + A_0.$$

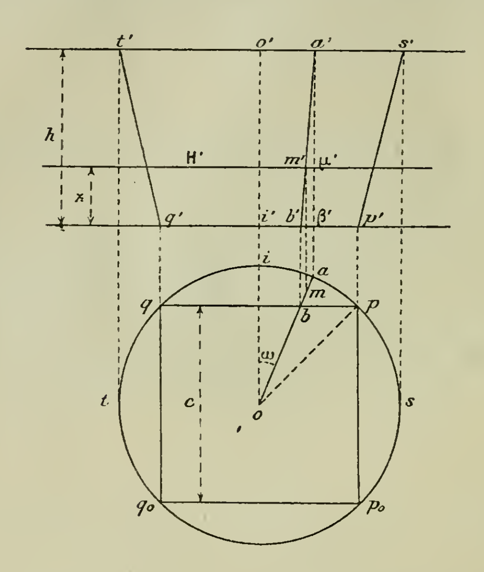
Autre solution par M. L. Poli.

2244.

(1915, p. 143.)

Étant donné un parallélépipède à base carrée et le cylindre circulaire droit qui lui est circonscrit, on considère le solide que l'on obtient en unissant la base inférieure de l'un à la base supérieure de l'autre au moyen de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur le contour de chacune de ces bases et dont le prolongement rencontre l'axe commun des deux solides donnés. Évaluer le volume du solide ainsi engendré en fonction du côté c de la base du parallélépipède et de sa hauteur h. On calculera le coefficient numérique qui entre dans cette expres-

sion à 0,0001 *près, et l'on se rendra compte de l'erreur relative que l'on commettrait en substituant au volume*



ainsi obtenu la moyenne des volumes du parallélépipède et du cylindre. M. d'Ocagne.

Solution

Par M. Philbert du Plessis.

La surface qui limite latéralement le solide se compose de quatre fragments de surfaces géométriquement distinctes, d'ailleurs identiques. Chacune d'elles, engendrée par une droite qui rencontre un cercle, l'axe de ce cercle et une droite parallèle au plan de ce cercle est une *arrière-voussure de Montpellier*.

Faisons l'épure de ce solide. Toute génératrice rectiligne de sa surface latérale rencontrant l'axe projeté horizontalement en O, a une projection horizontale ab passant par O, d'où la projection verticale $a'b'$ coupée en m' par un certain plan horizontal H'. En projection horizontale, le lieu du point m fait connaître, en vraie grandeur la section du solide par le

plan H'. On a immédiatement

$$\frac{bm}{ba} = \frac{b'm'}{b'a'} = \frac{\beta'\mu'}{\beta'a'},$$

ou, si l'on pose $Om = \rho$,

$$\frac{\rho - \frac{c}{2\cos\omega}}{\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{c}{2\cos\omega}} = \frac{z}{h},$$

c'est-à-dire

$$\rho = \frac{c}{2h}\left(\frac{h-z}{\cos\omega} + z\sqrt{2}\right),$$

équation de la forme $\rho = \frac{A}{\cos\omega} + B$ qui, en coordonnées polaires définit une *conchoïde de Nicomède* (conformément à l'énoncé de la question **2243**, résolue, 1916, p. 441). On en déduit, pour l'aire du secteur de la courbe compris entre Oi et Oa,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\omega} \rho^2\, d\omega = \frac{c^2}{8h^2}\left[(h-z)^2 \operatorname{tang}\omega + 2\sqrt{2}z(h-z)\, ln \times \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) + 2z^2\omega\right],$$

ln désignant un *logarithme népérien*.

Faisant $\omega = \frac{\pi}{4}$ et multipliant par 8, on a pour l'aire totale S de la section du solide par le plan H',

$$S = \frac{c^2}{h^2}\left[\left(1 - 2\sqrt{2}\lambda + \frac{\pi}{2}\right)z^2 + 2\left(\sqrt{2}\lambda - 1\right)hz + h^2\right],$$

où l'on a posé

$$\lambda = ln \operatorname{tang}\frac{3\pi}{8} = 0,88136.$$

Il vient ensuite, pour le volume demandé,

$$V = \int_0^h S\, dz = \frac{c^2 h}{3}\left(1 + \sqrt{2}\lambda + \frac{\pi}{2}\right),$$

ou, en remplaçant λ et π par leurs valeurs,

$$V = 1,2724\, c^2 h.$$

La demi-somme des volumes du parallélépipède et du cylindre est

$$V' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) c^2 h = 1,2854\, c^2 h.$$

En prenant la valeur V′ au lieu de V on commettrait donc, par excès, une erreur relative de

$$\frac{1,2854 - 1,2724}{1,2724} = 0,013.$$

2306 et 2307.

(1917, p. 79.)

2306. *Soient* OA *et* OB *deux tangentes rectangulaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements* (H_3). *Une conique quelconque qui touche* OA *et* OB *a, avec* (H_3), *quatre autres tangentes communes. La parabole qui les touche a pour foyer le symétrique de* O *par rapport au centre de la conique et son axe est parallèle à la tangente à* (H_3) *issue de* O. F. BALITRAND.

2307. *On considère une conique quelconque tangente en un point* O *à une hypocycloïde à trois rebroussements* (H_3). *Elle a, avec* (H_3), *quatre autres tangentes communes. La parabole qui les touche a pour foyer le symétrique de* O *par rapport au centre de la conique et son axe est parallèle à la tangente à* (H_3) *issue de* O.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Ces questions sont des cas particuliers de la proposition suivante :

Soient OA *et* OB *deux tangentes quelconques d'une hypocycloïde a trois rebroussements* (H_3). *Une conique quelconque qui touche* OA *et* OB *a, avec* (H_3), *quatre autres tangentes communes. La parabole qui les touche a pour*

foyer le symétrique de O *par rapport au centre de la conique et son axe est parallèle à la tangente à* (H_3) *issue de* O.

En effet soient OA et OB les axes,

$$(H_3) \equiv w(u^2 + u^2 - 2uv\cos\theta) + uv(\alpha u + \beta v),$$

la conique considérée sera

$$(\Gamma) \equiv uv + w(Au + Bv + Cw) = 0.$$

Les tangentes communes à (H_3) et (Γ) autres que OB, OA, touchent la parabole

$$(\pi) \equiv (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) - (\alpha u + \beta v)(Au + Bv + Cw) = 0.$$

(π) a pour foyer le point

$$Au + Bv + Cw = 0:$$

le point à l'infini sur son axe est

$$\alpha u + \beta v = 0;$$

(c) a pour centre le point

$$Au + Bv + 2Cw = 0,$$

et le point à l'infini sur la troisième tangente à (H_3) issue de O est

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

La proposition est démontrée.

Autres solutions, de MM. M.-F. Egan et J. Lemaire.

2308.

(1917, p. 79.)

Soient M *un point d'une hypocycloïde à trois rebroussements* H_3 *et* O *le centre de son cercle tritangent. On mène à la courbe la tangente* MT *issue de* M *et l'on joint* MO. *Démontrer que les angles* θ *et* ω, *que font avec la tangente en* M *les droites* MT *et* MO, *sont liés par la relation*

$$\operatorname{tang}\theta = 3\operatorname{tang}\omega.$$

F. Balitrand.

SOLUTION

Par M. M.-F. EGAN.

Un cercle (C) de rayon a roule dans un cercle (D) de centre O et de rayon $3a$. Soient B le point de contact des deux cercles, A le point de (C) opposé à B, M le point correspondant de (H_3). AM est la tangente à (H_3) en M. Abaissons la perpendiculaire OR sur AM.

On démontre sans peine que la tangente à (H_3) issue de M est parallèle à OAB, donc $\theta = \text{OAR}$.

D'autre part, les triangles OAR, BAM sont semblables, donc

$$\text{AM} = 2\,\text{AR}, \qquad \text{RM} = 3\,\text{AR},$$

d'où

$$\tang\theta = \text{OR} : \text{AR} = 3\,\text{OR} : \text{RM} = 3 \tang\omega.$$

C. Q. F. D.

Autres solutions, de MM. R. BOUVAIST, R. GOORMAGHTIGH, J. LEMAIRE et M. FAUCHEUX.

2309.

(1917, p. 80.)

D'un point P *on mène à une hypocycloïde à trois rebroussements les trois tangentes dont les points de contact sont* A, B, C. *Démontrer que le cercle circonscrit au triangle* PAB, *par exemple, admet pour tangente en* P *la conjuguée harmonique de* PC *par rapport à* PA *et* PB.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Les tangentes PA, PB, PC sont les hauteurs d'un triangle $\alpha\beta\gamma$ qui a l'hypocycloïde donnée pour hypocycloïde de Steiner, et les longueurs PA, PB, PC sont respectivement égales aux hauteurs de ce triangle. On déduit de là, en considérant une inversion de centre P, qu'une parallèle à la tangente en P au cercle PAB détermine sur PA et PB des segments PA', PB' proportionnels à $\beta\gamma$ et $\alpha\gamma$, donc inversement proportionnels aux sinus des angles de PC avec PA et PB. Par conséquent, le milieu de A'B' appartient à PC; il en résulte que la tan-

gente en P au cercle PAB est la conjuguée harmonique de PC par rapport à PA et PB.

Autres solutions, de MM. R. Bouvaist, M.-F. Egan et J. Lemaire.

2310.

(1917, p. 80.)

On considère une tangente fixe d'une hypocycloïde à trois rebroussements (H_3). *Démontrer que les couples de tangentes rectangulaires à l'hypocycloïde déterminent sur cette tangente fixe des segments qui ont tous même point milieu.* F. Balitrand.

Solution

Par M. H. Brocard.

Pour la démonstration demandée, il y aura avantage à se reporter tout d'abord à la solution de la question 2311, dont l'énoncé 2310 devient manifestement un corollaire.

En effet, adoptant les notations de la réponse 2311, soient OEA une tangente fixe à (H_3); PIC, PJD deux autres tangentes rectangulaires rencontrant OEA en C′ et D′. OA étant une corde de l'hyperbole équilatère de centre P et d'asymptotes PC, PD, on sait que le milieu E de OA est aussi le milieu de C′D′.

Si deux autres tangentes rectangulaires partent d'un autre point P′ du cercle (K), les deux nouveaux points C″, D″ déterminés sur OA auront encore leur milieu en E.

Plus simplement, mais toujours d'après la description des hyperboles du n° 2311, toutes ces courbes admettront pour cordes communes OA, OB, AB, dont les milieux I, J, L sont aussi les milieux des segments de ces cordes compris entre les asymptotes de toutes les hyperboles équilatères circonscrites au triangle OAB.

Autres solutions, de MM. R. Bouvaist. M.-F. Egan, R. Goormaghtigh et J. Lemaire.

2311.

(1917, p. 80.)

Soient OA *et* OP, PC *et* PD *deux couples de tangentes rectangulaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements* (H_3); A *et* B, C *et* D *étant les points de contact de ces tan-*

gentes : démontrer qu'il existe une hyperbole équilatère circonscrite au triangle OAB *et ayant pour asymptotes les droites* PC *et* PD. F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Cette proposition paraît pouvoir être formulée d'une autre manière.

Soient (K) un cercle donné [1], qui sera tritangent à (H_3); MY la tangente en M à ce cercle; O un point du même cercle; ME l'arc moitié de MO et pris de l'autre côté du diamètre MX du cercle et de (H_3).

On sait que la corde OE est tangente à (H_3) en un point A symétrique de O par rapport à E.

Soit EKF le diamètre mené par E. La corde OF sera tangente à (H_3) au point B symétrique de O par rapport à F. AB est, par construction, parallèle à EF et double de EF.

Soient P un autre point pris sur le cercle (K) et MJ l'arc moitié de MP. La corde PI sera tangente à (H_3) au point C symétrique de P par rapport à I, et la corde PJ perpendiculaire à PI sera tangente à (H_3) au point D symétrique de P par rapport à J.

Il reste à construire l'hyperbole équilatère de centre P, d'asymptotes PC, PD et circonscrite au triangle OAB rectangle en O.

Cette construction est possible, car le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle OAB est le cercle d'Euler, ici le cercle EMOF qui passe au point P.

Autres solutions (comme à 2310).

QUESTIONS.

2404. Soient Γ_1 la sinusoïde d'équation

$$y = a\left(\cos\frac{x}{a} - 1\right),$$

Γ_2 la chaînette d'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2\right),$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

Γ_3 la cycloïde définie par

$$x = a(\theta + \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta).$$

Chacune de ces courbes admet, en son sommet O, où elle est tangente à Ox, une conique surosculatrice (contact du cinquième ordre) γ_1, γ_2 ou γ_3.

Soient, de plus, C le point de Oy d'ordonnée $y = 3a$, δ et δ' les droites issues de O, qui font entre elles un angle de 60° et sont symétriques par rapport à Oy.

Chacune des coniques γ_1, γ_2 et γ_3 a pour centre le point C. En outre, γ_1 a ses points à l'infini, γ_2 ses sommets du petit axe, γ_3 ses foyers, sur δ et δ' (et, par suite, les sommets du petit axe de γ_2 coïncident avec les foyers de γ_3).

M. d'Ocagne.

2405. L'équation

$$1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^m - (\beta x)^n = 0,$$

α et β étant des quantités positives, a deux racines positives, si

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > (\alpha\beta)^{mn}.$$

On a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4mn}{m+n}} > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}.$$

A. Pellet.

2406. Si l'équation, où les α et β désignent des quantités positives,

$$1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_i}{x}\right)^i - \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j x)^j = 0,$$

a deux racines positives, la plus petite est inférieure à $3,4\alpha$ et la plus grande supérieure à $\frac{1}{3,4\beta}$, α désignant la plus grande des quantités α_i et β la plus grande des quantités β_j.

Si l'on a $1 > 9\alpha\beta$, le premier membre de cette équation est positif pour x compris entre 3α et $\frac{1}{3\beta}$.

A. Pellet.

2407. L'étude de l'équation modulaire conduit à ce théorème :

Soit la série holomorphe

$$f(x) = x^k + a_1 x^{k+1} + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

les coefficients a étant quelconques; l'équation $f^4(x) - 1 = 0$, autrement dit l'une des quatre équations :

$$f(x) = 1, \qquad f(x) = -1,$$
$$f(x) + \sqrt{-1} = 0, \qquad f(x) - \sqrt{-1} = 0,$$

a une racine de module inférieur à $\sqrt[k]{2}$, ou la série est divergente pour $x = \sqrt[k]{2}$.

A. Pellet.

2408. Sur la normale en un point donné M_0 d'un paraboloïde on prend un point P : on peut mener de ce point quatre autres normales à la surface; le point P se déplaçant sur la normale en M_0, l'enveloppe des sphères qui passent par les pieds des quatre normales est un ellipsoïde de révolution dont le centre est sur l'axe du paraboloïde, avec l'abscisse

$$\frac{x_0 + (p \pm q)}{2},$$

et dont l'axe est parallèle à la projection de la normale en M_0 sur le plan tangent au sommet de la surface (¹).

G. Fontené.

2409. Si deux triangles sont à la fois homologiques et orthologiques, les deux centres d'orthologie sont sur la perpendiculaire abaissée du centre d'homologie sur l'axe d'homologie.

Application. — Soient M et M′ deux points inverses par rapport à un triangle ABC, $\mu_1 \mu_2 \mu_3$, $\mu'_1 \mu'_2 \mu'_3$ leurs projections sur BC, CA, AB; si les droites $A\mu_1$, $B\mu_2$, $C\mu_3$ et $A\mu'_1$, $B\mu'_2$, $C\mu'_3$ sont concourantes, elles se coupent sur MM′ et les axes d'homologie des triangles ABC, $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$, ABC et $\mu'_1\ \mu'_2\ \mu'_3$ sont perpendiculaires à MM′.

R. Bouvaist.

2410. Construire une conique connaissant un point M, le cercle osculateur en ce point et deux tangentes (ou deux points).

A. Pellet.

(¹) Le lieu des centres de ces sphères a été demandé au Concours général pour la classe de Mathématiques spéciales, en 1883 voir *N. A.*, 1884, p. 423).

[R4]

SUR LA MÉTHODE DE POINCARÉ POUR ÉTUDIER LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ;

PAR M. P. APPELL.

I. Poincaré a donné, pour étudier la nature des positions d'équilibre d'un système, une méthode remarquable basée sur la considération des figures de bifurcation, des figures limites et des échanges de stabilité. Cette méthode est exposée dans le Mémoire *Sur l'équilibre d'une masse fluide* (*Acta mathematica*, t. VII), et dans l'Ouvrage de Poincaré : *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (Paris, Gauthier-Villars) ; elle est indiquée dans une Notice que je publie cette année dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* (1919) ; elle sera exposée dans le Tome IV de mon *Traité de Mécanique rationnelle*.

Je me borne ici, en vue de l'enseignement de spéciales et de licence, à exposer la méthode dans le cas le plus simple et à en donner des exemples élémentaires.

II. Imaginons un système matériel, à liaisons sans frottement, dont la position dépend d'une seule coordonnée q ; admettons que les forces données, qui agissent sur le système, dérivent d'une fonction des forces $U(q, \lambda)$ contenant, outre q, un autre paramètre λ indépendant de q.

On sait que les valeurs de q correspondant aux positions d'équilibre, pour une valeur donnée de λ, s'obtiennent en cherchant les valeurs de q qui rendent

$U(q, \lambda)$ *maximum* ou *minimum*; à une valeur de q rendant U *maximum*, correspond une position d'équilibre stable.

Ceci étant rappelé, la condition d'équilibre est donnée par l'équation

$$\varphi(q, \lambda) = \frac{\partial U}{\partial q} = 0.$$

Considérons deux axes Oq et $O\lambda$ (*fig.* 1) et construisons par rapport à ces axes la courbe $\varphi(q, \lambda) = 0$. Pour une valeur donnée de λ, q a plusieurs valeurs donnant des points A, B, C, ... de la courbe. A chacune de ces valeurs répond une position d'équilibre qu'on peut caractériser par le point correspondant de la courbe $\varphi = 0$. Quand λ varie d'une manière continue en croissant, chacun de ces points décrit une branche de courbe; on a ainsi des séries linéaires de figures d'équilibre.

Supposons que pour $\lambda = \lambda_0 = OP_0$, deux valeurs de q deviennent égales et que ces valeurs se séparent de nouveau pour $\lambda > \lambda_0$ de telle façon que la courbe présente un point double E : à ce point correspondra une position d'équilibre de bifurcation où deux séries linéaires A et B se croisent. Supposons au contraire que deux valeurs de q correspondant aux points C et D deviennent égales pour $\lambda = \lambda_1 = OP_1$, puis imaginaires pour $\lambda > \lambda_1$: alors la position correspondante L est une position d'équilibre limite. Il peut arriver qu'une position H soit à la fois limite et de bifurcation si, pour une certaine valeur $\lambda = \lambda_2 = OP_2$ trois valeurs de λ correspondant aux points P, Q, R devenaient égales, de façon que P, Q, R se confondent en un point H où passe une branche simple Q qui continue et une branche PR à tangente verticale : alors pour $\lambda > \lambda_2$, q n'aurait plus qu'une valeur réelle. Le point H

est à la fois une position limite et une position de bifurcation.

Il pourrait arriver inversement que pour $\lambda = \lambda_3 = OP_3$ (*fig.* 1, IV), trois valeurs de q soient égales, dont une

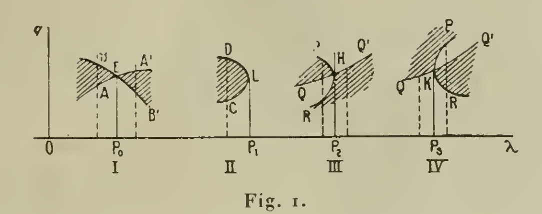


Fig. 1.

seule existerait pour $\lambda < \lambda_3$, les trois étant réelles pour $\lambda > \lambda_3$. Le point correspondant K serait à la fois limite et de bifurcation, mais il serait limite pour des valeurs de λ décroissantes jusqu'à λ_3.

La courbe $\varphi = 0$ divise le plan en deux régions; dans la première, la fonction $\varphi(q, \lambda)$ est positive : elle est couverte de hachures; dans la seconde $\varphi(q, \lambda)$ est négative. En un point de la courbe tel que A φ est nul, au-dessus $\varphi > 0$, au-dessous $\varphi < 0$; si donc, λ étant constant, q croît, la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$ est *positive* en A; donc U(q) y est minimum et A est une position d'équilibre *instable*. Au contraire, pour des raisons analogues, $\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$ est *négative* en B; donc la position correspondante est *stable*. Ainsi une position est stable ou instable suivant que la région au-dessus du point figuratif est blanche ou hachurée.

On voit alors immédiatement sur la figure 1 les faits suivants :

1° Si deux suites linéaires de positions d'équilibre se croisent en un point E, *figure de bifurcation*, les stabilités s'échangent : la suite B, qui était stable,

devient instable en B′; la suite A, qui était instable, devient stable en A′.

2° Si deux suites linéaires D et C se réunissent en un point limite L, l'une donne des figures stables, l'autre des figures instables; on peut dire aussi, en suivant l'arc DLC, que les figures correspondantes forment une seule suite linéaire dont les stabilités s'échangent quand on passe par L.

3° Si une figure H ou K est à la fois limite et de bifurcation, en suivant la branche simple oblique QQ′ on obtient des figures dont la stabilité s'échange; mais en suivant la branche PR, à tangente verticale en H ou K, on obtient des figures de *même nature* toutes stables ou toutes instables; il en est de même quand on change de branche, par exemple le long du contour PHQ′ les figures sont stables, avant et après H; il en est de même de RKQ.

Premier exemple. — *Régulateur de Watt.* — Cherchons les positions d'équilibre relatif d'un point pesant M qui glisse sans frottement sur une circonférence tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un diamètre vertical fixe. En prenant comme origine le centre O, comme axe des y la verticale descendante, et comme axe des x l'horizontale, on a

$$U = gy + \frac{\omega^2}{2} x^2,$$

où x et y sont les coordonnées du mobile. Soient a le rayon de la circonférence, q l'angle du rayon OM avec Oy, on a

$$y = a\cos q, \qquad x = a\sin q;$$

d'où

$$U = ag\left[\cos q + \frac{1}{2}\lambda\sin^2 q\right],$$

λ ayant la valeur *positive* : $\lambda = \frac{a}{g}\omega^2$. On obtient tous les points de la circonférence en faisant varier q de $-\pi$ à $+\pi$. On a donc

$$-\pi < q \leqq +\pi, \qquad 0 \leqq \lambda.$$

Ceci posé, on a

$$\varphi(q, \lambda) = \frac{\partial U}{\partial q} = ag \sin q [\lambda \cos q - 1].$$

La courbe $\varphi(q, \lambda) = 0$ (*fig.* 2) se compose de plusieurs branches :

$$(\mathrm{O}\lambda) \quad q = 0, \qquad (\mathrm{AA'}) \quad q = \pi, \qquad (\mathrm{BB'}) \quad q = -\pi$$

et

$$(\mathrm{CHC'}) \quad \lambda \cos q - 1 = 0 :$$

cette dernière branche, construite en faisant varier q de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ pour que λ soit positif, a la forme indiquée (*fig.* 2) : elle est symétrique par rapport à $\mathrm{O}\lambda$ et

Fig. 2.

a pour asymptotes $q = \pm \frac{\pi}{2}$. Dans la figure, nous avons couvert de hachures la région pour laquelle $\varphi(q, \lambda) > 0$. Si λ est plus petit que 1 (point P sur $\mathrm{O}\lambda$, il existe deux positions d'équilibre correspondant aux points $\mathrm{P}(q = 0)$ et $\mathrm{Q}(q = \pi)$; la première, d'après la disposition des hachures, est stable ; la deuxième, instable.

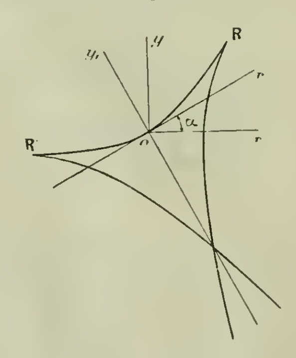
Si λ prend la valeur 1, P vient en H équilibre limite et de bifurcation, stable. Si $\lambda > 1$, on a le point $P'(OP' = \lambda)$, dont l'ordonnée coupe la courbe en quatre points C', P', C, A'; à chacun de ces points correspond une position d'équilibre (C' stable, P' instable, C stable, A' instable). On voit que, quand λ atteint et dépasse 1, la série linéaire des positions P, qui était stable, devient instable en P', et deux nouvelles séries linéaires de figures symétriques C et C' apparaissent, stables toutes deux; on a ainsi un exemple très simple d'un équilibre H à la fois limite et de bifurcation, avec échange de stabilités.

Deuxième exemple. — Imaginons, dans un plan vertical, la courbe définie par les équations

$$y_1 = 3q^2(2 - q^2), \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = q,$$
$$x_1 = 4q\ (3 - q^2),$$

par rapport à deux axes rectangulaires $x_1 O y_1$. Cette courbe a la forme indiquée dans la figure 3 avec deux

Fig. 3.



points de rebroussements, R et R', correspondant à $q = \pm 1$. Elle est symétrique par rapport à Oy_1.

Appelons α l'angle de Ox_1 avec l'horizontale Ox, et prenons un axe vertical ascendant Oy. Un point matériel pesant M glisse sans frottement sur cette courbe; trouver les positions d'équilibre du point.

Appelons y l'ordonnée de M par rapport aux axes xOy : on a, pour la fonction des forces

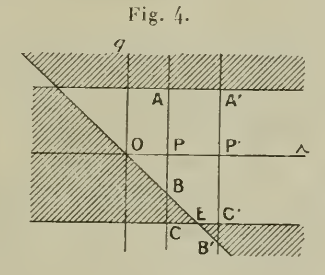
$$\begin{aligned} U = - mgy &= - mg[x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha] \\ &= - mg \cos\alpha [4q(3-q^2)\lambda + 3q^2(2-q^2)], \end{aligned}$$

en posant $\lambda = \operatorname{tang}\alpha$. Nous supposerons que α varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Alors la fonction $\varphi(q, \lambda) = \frac{\partial U}{\partial q}$ est, à un facteur positif près, égal à

$$\varphi(q, \lambda) = -(1-q^2)(\lambda + q).$$

La courbe $\varphi(q, \lambda) = 0$ se compose (*fig.* 4) des trois

Fig. 4.



droites $q = 1$, $q = -1$, $q = -\lambda$. La partie du plan $\varphi(q, \lambda) > 0$ est couverte de hachures.

Si $-1 \leqq \lambda \leqq +1$, en prenant $\overline{OP} = \lambda$, on voit qu'il y a trois positions d'équilibre représentées par les points A, B, C : A et C instables (points de rebroussement); B stable. Il faut se représenter le point M placé en un rebroussement comme un point posé sur une pointe.

Si $\lambda > 1$, en prenant $\overline{OP'} = \lambda$, on trouve de même trois positions représentées par A', B', C'; les positions

correspondant à A′ et B′ sont stables, C′ instable; il y a un échange de stabilité entre les séries linéaires B, B′ et C, C′. Au point de rebroussement (position stable) il faut se figurer le point M comme placé au fond d'un tube pointu.

Si $\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{3\pi}{2}$, le facteur $\cos\alpha$ dans U est *négatif*; la figure est la même, mais les parties hachurées sont blanches et inversement.

Troisième exemple. — *Exercice :* Équilibre d'un point glissant sans frottement sur une parabole $y^2 = 2px$ et repoussé par un point de l'axe ($x = \lambda$, $y = 0$) proportionnellement à la distance.

En prenant comme coordonnée q l'ordonnée y du point, on a une figure analogue à (2).

IV. Généralisations. — On trouvera dans Poincaré l'étude des cas où la position du système dépend de plusieurs coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

On peut aussi imaginer un système à une coordonnée q, dont la fonction des forces contient *plusieurs* paramètres. Par exemple, si cette fonction contient deux paramètres λ et μ, $U(q, \lambda, \mu)$, en posant

$$\varphi(q, \lambda, \mu) = \frac{\partial U}{\partial q},$$

on pourra, par rapport à trois axes rectangulaires $O\lambda$, $O\mu$, Oq, considérer les surfaces $\varphi(q, \lambda, \mu) = 0$ et les régions $\varphi(q, \lambda, \mu) \gtrless 0$.

Un exemple simple est fourni par l'équilibre d'un point sur une parabole, ce point étant repoussé par un point fixe donné dans le plan de la courbe, proportionnellement à la distance.

[O¹6h]

SUR LA DÉTERMINATION DES SURFACES MINIMA;

PAR M. C. CLAPIER.

D'après les formules de Monge, une surface minima peut être déterminée comme lieu des milieux des cordes qui s'appuient sur deux lignes de longueur nulle. Celles-ci doivent satisfaire à la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

que l'on peut écrire

$$(dx + i\,dz)(dx - i\,dz) = -dy^2.$$

Nous pouvons poser

$$\frac{dx + i\,dz}{-dy} = \tang\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{dx - i\,dz}{dy} = \cot\frac{\varphi}{2},$$

d'où l'on déduit, en introduisant une fonction arbitraire qui caractérise la ligne isotrope,

$$\frac{dx}{1 - \tang^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{dy}{2\tang\frac{\varphi}{2}} = \frac{dz}{i\left(1 + \tang^2\frac{\varphi}{2}\right)} = \mathfrak{F}(\varphi)\,d\varphi$$

et, par suite, avec une nouvelle fonction de φ,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \cos\varphi\,\mathfrak{F}(\varphi)\,d\varphi,\\ dy &= \sin\varphi\,\mathfrak{F}(\varphi)\,d\varphi,\\ dz &= i\,\mathfrak{F}(\varphi)\,d\varphi.\end{aligned}\right.$$

On aurait une deuxième ligne isotrope, en posant

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \cos\Psi\,\mathfrak{F}_1(\Psi)\,d\Psi,\\ dy &= \sin\Psi\,\mathfrak{F}_1(\Psi)\,d\Psi,\\ dz &= -i\,\mathfrak{F}_1(\Psi)\,d\Psi.\end{aligned}\right.$$

Soient M_a et M_b deux points quelconques pris respec-

tivement sur ces deux lignes isotropes, la surface minima (M) est déterminée par

$$(3)\quad x = \frac{x_a + x_b}{2}, \qquad y = \frac{y_a + y_b}{2}, \qquad z = \frac{z_a + z_b}{2},$$

formules qui contiennent deux fonctions arbitraires $\mathcal{F}(\varphi)$ et $\mathcal{F}_1(\Psi)$.

On aura des points réels, en prenant ces deux fonctions imaginaires conjuguées, ainsi que les paramètres φ et Ψ.

Les quadratures peuvent s'effectuer, dans le cas où chacune des fonctions est la somme de la dérivée première et de la dérivée troisième d'une autre fonction

$$\mathcal{F}(\varphi) = F'(\varphi) + F'''(\varphi), \qquad \mathcal{F}_1(\psi) = f'(\psi) + f'''(\psi);$$

on obtient alors, sous forme explicite,

$$(A)\quad \begin{cases} x_a = F' \sin\varphi + F'' \cos\varphi, \\ y_a = - F' \cos\varphi + F'' \sin\varphi, \\ z_a = i(F + F''); \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} x_b = f' \sin\psi + f'' \cos\psi, \\ y_b = - f' \cos\psi + f'' \sin\psi, \\ z_b = - i(f + f''). \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans les égalités (3), on a les formules trouvées par Ribaucour, en considérant une surface minima comme la surface moyenne d'une congruence isotrope. Nous donnerons une démonstration géométrique de ces formules et la signification géométrique de l'angle φ.

Nous avons, pour l'élément linéaire de la surface minima (3),

$$ds^2 = \frac{(dx_a + dx_b)^2}{4} + \frac{(dy_a + dy_b)^2}{4} + \frac{(dz_a + dz_b)^2}{4},$$

$$ds^2 = \frac{1}{2}(dx_a\, dx_b + dy_a\, dy_b + dz_\alpha\, dz_b),$$

et les formules (1) et (2) nous donnent

$$ds^2 = \frac{1 + \cos(\varphi - \Psi)}{2} \mathcal{F}(\varphi)\, \mathcal{F}_1(\Psi)\, d\varphi\, d\Psi;$$

nous avons, avec les lignes isotropes (A) et (B),

$$(4) \qquad ds^2 = (F' + F''')(f' + f''') \cos^2 \frac{\varphi - \Psi}{2} d\varphi\, d\Psi.$$

Cherchons la représentation sphérique de la surface (M). Il est évident que par le point M passe deux lignes de longueur nulle dont les tangentes sont parallèles aux tangentes aux points M_a et M_b des lignes isotropes (A) et (B). De sorte que les cosinus directeurs (c, c', c'') de la normale doivent vérifier les conditions

$$c \cos\varphi + c' \sin\varphi + ic'' = 0,$$
$$c \cos\Psi + c' \sin\Psi - ic'' = 0.$$

On en déduit

$$\frac{c}{-\sin\frac{\varphi + \Psi}{2}} = \frac{c'}{\cos\frac{\varphi + \Psi}{2}} = \frac{c''}{i \sin\frac{\varphi - \Psi}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{\varphi - \Psi}{2}}$$

et, pour l'élément linéaire de la représentation sphérique,

$$(5) \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi - \Psi}{2}} d\varphi\, d\Psi.$$

Remarque. — Plaçons-nous dans le cas des surfaces réelles. Les fonctions F et f étant imaginaires conjuguées, nous poserons

$$\varphi = \alpha + i\beta, \qquad \Psi = \alpha - i\beta.$$

Déterminons un point de la sphère-unité par sa

longitude v et sa colatitude u,

$$c = \sin u \cos v = \frac{-\sin \alpha}{\cos i\beta},$$

$$c' = \sin u \sin v = \frac{\cos \alpha}{\cos i\beta},$$

$$c'' = \cos u = i \operatorname{tang} i\beta.$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + v, \qquad -\beta = \log \cot \frac{u}{2}, \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2 i\beta}(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Ce sont les formules qui permettent de faire une projection géographique de la sphère par le système de Mercator.

A toute représentation géographique de la sphère correspond un système de formules qui définissent les surfaces minima.

Ainsi la représentation par projection stéréographique nous donne la formule bien connue de Weierstrass.

Le problème de la détermination des surfaces minima est lié à celui des Cartes géographiques, c'est-à-dire à celui de la détermination des systèmes isothermes de la sphère.

Si dans les formules de Ribaucour, appliquées aux surfaces minima réelles, on change F en iF et f en $-if$, on obtient une surface minima (M') conjuguée de (M).

Lignes de courbure. — Les formules (4) et (5) nous permettent d'obtenir le rayon de courbure principal R. Nous avons

$$ds^2 = R^2\, d\sigma^2, \qquad R^2 = (F' + F''')(f' + f''') \cos^4 \frac{\varphi - \Psi}{2}.$$

De plus on a, pour deux directions conjuguées.

$$dx\,\delta c + dy\,\delta c' + dz\,\delta c'' = 0,$$

ou bien, d'après les formules (1) et (2),

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi\,\delta c + \sin\varphi\,\delta c' + i\,\delta c'')\,\mathfrak{F}\,d\varphi\\ &+(\cos\Psi\,\delta c + \sin\Psi\,\delta c' - i\,\delta c'')\,\mathfrak{F}_1\,d\Psi = 0.\end{aligned}$$

En différentiant les relations qui expriment que la normale est perpendiculaire aux deux lignes isotropes qui passent en M,

$$\begin{aligned}&\cos\varphi\,\delta c + \sin\varphi\,\delta c' + i\,\delta c'' = (c\sin\varphi - c'\cos\varphi)\,\delta\varphi,\\ &\cos\Psi\,\delta c + \sin\Psi\,dc' - i\,\delta c'' = (c\sin\Psi - c'\cos\Psi)\,\delta\Psi.\end{aligned}$$

Et comme on a aussi

$$c(\sin\varphi - \sin\Psi) = c'(\cos\varphi - \cos\Phi),$$

on a, pour l'équation de directions conjuguées,

$$(6)\qquad (F' + F''')\,d\varphi\,\delta\varphi + (f' + f''')\,d\Psi\,\delta\Psi = 0.$$

Il en résulte pour celle des lignes asymptotiques

$$\sqrt{F' + F'''}\,d\varphi \pm i\sqrt{f' + f'''}\,d\Psi = 0;$$

et pour l'équation différentielle des lignes de courbure,

$$(7)\qquad \sqrt{F' + F'''}\,d\varphi \pm \sqrt{f' + f'''}\,d\Psi = 0.$$

Ces lignes seront algébriques, si $\int d\varphi\sqrt{F' + F'''}$ est une expression algébrique.

Démonstration géométrique. — Une ligne isotrope (A) peut être considérée comme l'arête de rebroussement d'une développable isotrope. Celle-ci jouit des propriétés suivantes :

1° Ses plans tangents sont parallèles à leur perpen-

diculaire; 2° ses génératrices rectilignes, lignes de longueur nulle, sont normales à la surface. Il en résulte que toute ligne tracée sur la surface est ligne de courbure, admettant pour développée l'arête de rebroussement.

Désignons par (A_1) la trace de développable sur le plan des xy et par (a) la développée de cette courbe. La normale à la surface en un point A_1 de cette courbe plane, envisagée comme ligne de courbure, n'est autre que la génératrice $\overline{A_1 A}$; elle a une enveloppe qui n'est autre que l'arête de rebroussement; le point de contact A doit être situé sur la droite polaire menée par le point a, perpendiculaire au plan des xy.

Il en résulte que la développée (a) de la trace (A_1) de la développable est la projection de l'arête de rebroussement (A) sur le plan des xy. Si l'on prend une deuxième arête rebroussement (B), on voit que le milieu M de $\overline{AB}$ se projette au milieu de $\overline{ab}$.

Si les tangentes aux points correspondants des traces (A_1) et (B_1), sur le plan des $x\varphi$, ont pour équation

$$x \cos\varphi + \varphi \sin\varphi = F(\varphi),$$
$$x \cos\Psi + \varphi \sin\Psi = f(\Psi).$$

On en déduit les deux premières formules de Ribaucour.

La droite $\overline{A_1 A}$ est une droite isotrope qui va passer par un point I du cercle imaginaire de l'infini; elle se projette suivant $A_1 a$. De même $\overline{B_1 B}$ est une droite isotrope qui va passer par un point J du cercle imaginaire; et nous avons

$$\overline{Aa} = z_a = \quad i R_a, \qquad \overline{A_1 a} = R_a,$$
$$\overline{Bb} = z_b = - i R_b, \qquad \overline{B_1 b} = R_b;$$

R_a et R_b sont les rayons de courbure de (A_1) et (B_1).

On a donc par le point M, milieu de AB,

$$z = \frac{z_a + z_b}{2} = i\frac{R_a - R_b}{2},$$

et comme

$$R_a = F + F'', \qquad R_b = f + f''.$$

nous retrouvons la troisième formule de Ribaucour. L'angle φ est l'angle de la normale $\overline{A_1 a}$ avec l'axe des x; c'est aussi l'angle de la normale à la développée avec l'axe des φ.

Si l'on suppose les arêtes de rebroussement (A) et (B) confondues, on a une développable double à laquelle correspond une surface minima qui admet la développée double (a) comme ligne géodésique.

S étant l'axe de cette géodésique, son rayon de courbure $R_1 = \frac{ds}{d\varphi}$, et comme (A) est une développable de (a), $ds = d\mathrm{R}a$; donc

$$R_1 = \frac{dR_a}{d\varphi} = F' + F'''.$$

De sorte que l'on a, pour la surface minima correspondante,

$$x = \frac{x_\varphi + x_{\varphi_1}}{2}, \qquad y = \frac{y_\varphi + y_{\varphi_1}}{2}, \qquad z = i\frac{S_a - S_b}{2},$$

φ et φ_1 étant les paramètres de deux points de la géodésique.

D'après la formule (4), l'élément linéaire

$$dS^2 = R_1^2 \cos^2\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\, d\varphi\, d\varphi_1$$

et la formule (7) nous donne pour l'équation des lignes

de courbure

$$\sqrt{R_1}\, d\varphi \pm \sqrt{R_1}\, d\varphi_1 = 0.$$

Exemple. — Déterminons la surface minima qui admet comme géodésique la première podaire négative d'une parabole. Nous avons, en désignant par ρ le rayon vecteur de la parabole et φ l'angle polaire,

$$\rho = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}, \qquad R_1 = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{\frac{3}{2} a}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}},$$

$$\int \sqrt{R_1}\, d\varphi = a_1 \int \frac{d\varphi}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = a_1 \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}.$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques sont algébriques.

La surface est elle-même algébrique. Ses lignes de courbure étant déterminées par la relation

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \pm \operatorname{tang} \frac{\Psi}{2} = \text{const.},$$

celle-ci s'écrit avec les paramètres des formules de Weierstrass :

$$u \pm u_1 = \text{const.} \qquad (u = \alpha - i\beta,\ u_1 = \alpha + i\beta).$$

La surface envisagée n'est autre que la surface d'Enneper; elle correspond à

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \alpha + \alpha\beta^2 - \frac{\alpha^3}{3}, \\ z &= \beta + \alpha^2\beta - \frac{\beta^3}{3}, \\ y &= \alpha^2 - \beta^2. \end{aligned} \right. \quad (^1)$$

(1) *Voir* ma Thèse : *Sur les surfaces minima ou elassoïdes* (Gauthier-Villars, 1919).

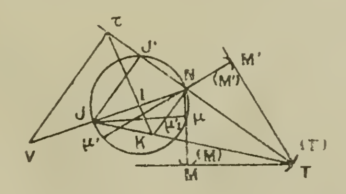
[O¹2]

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

1. En chaque point M d'une courbe (M) prenons sur la tangente à la courbe un segment variable MT égal à une fonction r de l'angle de contingence φ de (M) au point M; proposons-nous de construire la normale et le centre de courbure τ de la courbe (T), lieu de T, au point T.

Soient μ, μ_1 les deux premiers centres de courbure de (M) en M; r', r'' les deux premières dérivées de r par rapport à φ. La construction de la normale en T à la courbe (T) s'obtient immédiatement en observant que, si N désigne l'intersection de $T\tau$ avec $M\mu$, le segment μN est égal, d'après une relation connue [1], à la dérivée de r par rapport à φ.



Pour déterminer le point τ, considérons la déformation du triangle MTN. Soit J le point où la normale en N à l'élément décrit par ce point rencontre $\mu\mu_1$: le segment $\mu_1 J$ est égal à r''. On a, d'autre part, en dési-

[1] Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 44.

gnant par V l'intersection de NJ avec la perpendiculaire élevée en τ sur $T\tau$,

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{T})} = \frac{\overline{\mathrm{M}\mu}}{\overline{\mathrm{TN}}}, \qquad \frac{d(\mathrm{T})}{d(\mathrm{N})} = \frac{\overline{\mathrm{T}\tau}}{\overline{\mathrm{NV}}}, \qquad \frac{d(\mathrm{N})}{d(\mathrm{M})} = \frac{\overline{\mathrm{NJ}}}{\overline{\mathrm{M}\mu}}.$$

Par suite, si J' est la projection de J sur TN, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{T}\tau}}{\overline{\mathrm{TN}}} = \frac{\overline{\mathrm{NV}}}{\overline{\mathrm{NJ}}} = \frac{\overline{\mathrm{N}\tau}}{\overline{\mathrm{NJ'}}}$$

ou

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{N}\tau}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{NT}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{NJ'}}}.$$

On déduit de ce qui précède les constructions suivantes pour la normale et le centre de courbure de la courbe (T) au point T :

Le point N *obtenu en portant sur* $\mathrm{M}\mu$ *un segment* $\overline{\mu\mathrm{N}}$ *égal à* r' *appartient à la normale cherchée. Soit* J *le point obtenu en portant sur* $\overline{\mu\mu_1}$ *le segment* $\overline{\mu_1\mathrm{J}}$ *égal à* r''; *le centre de courbure cherché* τ *est le milieu du segment compris entre* N *et le conjugué harmonique de* N *par rapport à* T *et la projection de* J *sur* TN (¹).

Ayant déterminé le point J sur $\mu\mu_1$, on peut aussi en déduire τ par la construction suivante :

Soit K *le point où* JT *rencontre la perpendiculaire élevée en* N *sur* TN; *la droite qui joint* K *au milieu* I *de* NJ *passe par le centre de courbure cherché.*

2. *Courbes tractrices.* — Si r est une constante,

(¹) Dans cette construction, il y a lieu de tenir compte des signes de r' et r''.

(T) est une courbe équitangentielle de (M), et (M) une courbe tractrice de (T); on retrouve facilement, au moyen de ce qui précède, la construction donnée par M. d'Ocagne pour obtenir le deuxième centre de courbure μ_1 d'une courbe tractrice (M) d'une courbe (T) quand on connaît le centre de courbure τ de (T) en T [1].

3. *Conchoïdes.* — La tangente MT à la courbe (M) coupant une courbe (T) en T, considérons le lieu (T_1) du point T_1 obtenu en prolongeant $\overline{MT}$ d'un segment constant $\overline{TT_1}$; la définition du lieu (T_1) généralise celle des conchoïdes. La construction [2] du centre de courbure de (T_1) indiquée dans les *Nouvelles Annales*, 1917, p. 434, découle de la construction générale trouvée ci-dessus.

4. *Courbes isoptiques.* — Menons par le point T une droite faisant avec MT un angle constant; cette droite touche son enveloppe (M′) au point M′, projection de N sur cette droite; la courbe (T) est une courbe isoptique de (M) et (M′). Soit μ' le centre de courbure de (M′) en M′. La droite NJ est la normale de la courbe décrite par N; or cette courbe est une isoptique des développées de (M) et (M′); par conséquent, la perpendiculaire élevée en μ' sur $M'\mu'$ passe

(1) Les propriétés infinitésimales des courbes *équisoclines* (*Intermediaire des Mathématiciens*, 1915, p. 105, 177, 272; 1916, p. 151) se déduisent immédiatement de celles des tractrices.

(2) On peut déduire de cette construction celle du centre de courbure de la *conchoïde de Dürer*. Elle permet en outre de retrouver ce théorème, dû à Rivals :

Les centres de courbure des éléments décrits simultanément par des points marqués sur une droite qui se déplace dans un plan appartiennent à une conique.

par J. On retrouve donc cette construction connue du centre de courbure τ de l'isoptique (T) de deux courbes (M) et (M') [1] :

Soit N l'intersection de $M\mu$, $M'\mu'$; *le cercle* $N\mu\mu'$ *coupe* TN *en* J'. *Le centre de courbure* τ *est le milieu du segment compris entre* N *et le conjugué harmonique de* N *par rapport à* T *et* J'.

5. *Développées intermédiaires.* — Portons sur la tangente à (M) en M vers l'origine des arcs un segment MM_1 égal à l'arc de (M) en M; le lieu (M_1) de M_1 est une développante de (M) et le lieu du point T qui divise $\overline{M_1M}$ dans le rapport constant λ est la développée intermédiaire d'indice λ de (M_1).

La normale à la développée intermédiaire (T) *passe par le point* N *qui divise le deuxième rayon de courbure de* (M_1) *dans le rapport* λ. *Pour obtenir le centre de courbure* τ *de* (T), *on projette en* J' *sur la normale à* (T) *le point qui divise le troisième rayon de courbure de* (M_1) *dans le rapport* λ; τ *est le milieu du segment compris entre* N *et le conjugué harmonique de ce point par rapport à* T *et* J' [2].

6. *Courbes tangentielles.* — Sur la tangente au point M d'une courbe (M) on porte un segment MT tel que sa projection sur une droite fixe Δ soit constante; le lieu (T) de T est une courbe tangentielle de (M) [3].

---

(1) MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 33.

(2) *Voir* L. BRAUDE, *Les coordonnées intrinsèques* (*Scientia*, n° 34, p. 57); ce résultat y est obtenu analytiquement.

(3) Au sujet de cette transformation, *voir* HOCHHEIM, *Tangentialkurven der Kegelschnitte* (*Zeitschrift für Math. u. Phys.*, 1870); RETALI, *Sopra una corrispondenza* [*m*, *n*] (*Rendiconti Ist. Lomb.*, 1899).

Si les parallèles menées par M *à* Δ *et par* T *à* Mμ *se coupent en* L, *la normale en* T *à* (T) *est parallèle à* μL.

La perpendiculaire élevée en L *sur* ML *rencontre* MT *en* P; *soient* Q *le symétrique de* T *par rapport à* P, J *celui de* Q *par rapport au milieu de* Mμ_1, N *l'intersection de la normale à* (T) *avec* Mμ. *Le centre de courbure est le milieu du segment compris entre* N *et le conjugué harmonique de* N *par rapport à* T *et la projection de* J *sur* TN.

Réciproquement, connaissant la normale et le centre de courbure de la courbe (T) en T, on peut obtenir les deux premiers centres de courbure μ et μ_1 de la courbe (M) en M. En particulier, quand on considère une logarithmique (M) et son asymptote (T), on obtient des constructions simples pour les deux premiers centres de courbure de la logarithmique.

7. *Courbes définies par leur équation polaire.* — Si l'on suppose que la courbe (M) se réduise à un point fixe M, le problème général revient à la construction du centre de courbure des courbes définies par leur équation polaire $r = f(\varphi)$.

α. *Radiales.* — Par un point fixe M du plan, on mène des segments MT équipollents aux rayons de courbure d'une courbe Γ; le lieu (T) du point T est la radiale de Γ.

Par le point N *on mène les segments* MN, MJ *équipollents aux deuxième et troisième rayons de courbure de* Γ; TN *est la normale à la radiale en* T. *Soit* K *le point où la perpendiculaire élevée en* N *sur* TN *rencontre* MT; *la droite qui joint* K *au*

milieu de NJ *passe par le centre de courbure de la radiale.*

β. *Centre de courbure des spirales de degrés quelconques* $r^k = a^k \varphi$:

La normale en T *à la spirale rencontre en* N *la perpendiculaire élevée en* M *sur* MT, *celle élevée en* N *sur* NT *coupe* MT *en* K; *on prend sur* $\overline{MK}$ *le segment* $\overline{MJ}$ *égal à* $(1-k)\overline{MK}$; *la droite qui joint* K *au milieu de* NJ *passe par le centre de courbure de la spirale* (¹).

γ. *Rosaces.* — Dans le cas d'une rosace d'indice n, le point J s'obtient en prenant sur $\overline{MT}$ le segment $\overline{MJ} = n^2 \overline{MT}$.

δ. La méthode générale permet de déduire la construction du centre de courbure des courbes $r = f(n\varphi)$ de celle du centre de courbure de la courbe $r = f(\varphi)$; on pourra, en particulier, obtenir une construction de la normale et du centre de courbure des *courbes à n ventres* en observant que ces courbes sont les transformées des coniques qui ont le pôle pour foyer et l'axe polaire pour axe focal.

8. *Une méthode de généralisation.* — Revenons aux considérations générales du paragraphe 1. Par un point fixe M_0 du plan, menons un segment M_0T_0 équipollent à MT, et considérons le lieu (T_0) du point T_0.

(¹) Dans le cas de la *spirale de Fermat*, J est le symétrique de K par rapport à M. Pour la *spirale d'Archimède*, le centre de courbure appartient à la droite qui joint K au milieu de MN. Dans le cas de la *spirale hyperbolique*, la perpendiculaire élevée en K sur TK passe par le centre de courbure; on retrouve donc une construction indiquée par M. Balitrand (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 223).

Si l'on connaît la normale et le centre de courbure τ de (T) en T, on peut en déduire la normale et le centre de courbure de (T_0) en T_0, et réciproquement. Soit, en effet, N_0 le point où la normale en T_0 à (T_0) coupe la perpendiculaire élevée en M_0 sur M_0T_0; le segment $\overline{M_0N_0}$ est égal à $\overline{\mu N}$; de même, si J_0 désigne le point analogue à J, on a

$$\overline{M_0J_0} = \overline{\mu_1 J}.$$

Cela posé, envisageons, par exemple, la transformation par inversion qui fait correspondre au lieu (T_0) de T_0 le lieu (T'_0) du point T'_0 tel que

$$M_0T_0 . M_0T'_0 = k^2;$$

considérons alors, plus généralement, la transformation qui fait correspondre au lieu (T) du point T le lieu (T') du point T' de MT tel que

$$MT . MT' = k^2.$$

Connaissant le centre de courbure τ de (T) en T, on peut en déduire le centre de courbure τ_0 de (T_0) en T_0; d'après une propriété connue, $M_0\tau_0$ passe par le centre de courbure τ'_0 de (T'_0) en T'_0; connaissant le point τ'_0, on en déduit le centre de courbure τ' de (T') en T'. On simplifie les constructions en faisant coïncider, pour chaque position de M sur la courbe (M), le point M_0 avec le point M.

La méthode que nous venons d'indiquer pour le cas particulier de l'inversion a une portée tout à fait générale : la tangente en un point M de la courbe (M) coupant n courbes $(T_1), (T_2), \ldots, (T_n)$ en $T_1, T_2, \ldots, T_n$, considérons le lieu (T') du point T' de MT tel que

$$\overline{MT'} = f(\overline{MT_1}, \overline{MT_2}, \ldots, \overline{MT_n}).$$

On pourra toujours résoudre le problème de la construction de la normale et du centre de courbure de la courbe (T′) quand on en connaît une solution pour le cas particulier où la courbe (M) se réduit à un point.

[R8aα]

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

Par M. Ét. DELASSUS.

Il s'agit du problème de Mécanique donné à l'agrégation en 1903 et qui, en supprimant certaines restrictions inutiles et généralisant quelque peu, est l'étude du mouvement d'un solide fixé par son centre de gravité, dont l'ellipsoïde central est de révolution et qui, suivant cet axe, est percé d'un canal de section infiniment petite à l'intérieur duquel se meuvent symétriquement et suivant une loi donnée deux insectes identiques.

Les trois premières parties de l'énoncé étaient des jalons pour indiquer aux candidats qu'on leur demandait d'appliquer, avec les modifications appropriées, la méthode d'Euler qui donne les équations bien connues du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

Je me propose de montrer que l'application régulière des méthodes générales que je préconise et expose dans mes *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels* conduit directement et bien plus simplement, sans aucune intégration effective, au résultat cherché. Comme mes recherches et mes leçons sont bien postérieures au problème considéré, ce n'en sera pas une critique, ce sera simplement un exemple d'un cas, d'ailleurs peu fréquent, où, bien que l'intégrale des

forces vives, même généralisée, n'existe pas, l'application des équations de Lagrange fournit néanmoins la solution.

Les axes mobiles sont tout indiqués; désignant par z et $-z$ les z fonctions de t qui déterminent la position des deux insectes on a, en supprimant un terme z'^2 équivalent à zéro, la fonction génératrice

$$2G = \Phi(t)(\psi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2) + C(\psi' \cos\theta + \varphi')^2$$

qui est homogène et dans laquelle on a posé

$$\Phi(t) = A + 2mz^2;$$

elle met en évidence θ comme paramètre principal et φ, ψ comme paramètres secondaires donnant les deux intégrales linéaires immédiates :

$$\psi' \cos\theta + \varphi' = r_0,$$
$$\Phi(t)\psi' \sin^2\theta = \lambda - Cr_0 \cos\theta.$$

Comme il n'y a pas d'intégrale de force vive, nous devons former la fonction génératrice réduite relative à l'inconnue principale (*voir* mes *Leçons*, Chap. V, Section III) et, dans ce but, porter les valeurs de φ' et ψ' dans

$$2G' = 2G - 2\varphi' \frac{\partial G}{\partial \varphi'} - 2\psi' \frac{\partial G}{\partial \psi'},$$

ou, plus simplement, puisque $2G$ est homogène dans

$$2G' = \theta' \frac{\partial G}{\partial \theta'} - \varphi' \frac{\partial G}{\partial \varphi'} - \psi' \frac{\partial G}{\partial \psi'} = \theta' \frac{\partial G}{\partial \theta'} - Cr_0\varphi' - \lambda\psi'$$

qui est linéaire. Après suppression d'un terme constant, on obtient

$$2G' = \theta'^2 \Phi(t) - \frac{F^2(\theta)}{\Phi(t)}$$

avec

$$F(\theta) = \frac{\lambda - Cr_0 \cos\theta}{\sin\theta}, \qquad F'(\theta) = \frac{Cr_0 - \lambda \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

et l'on en déduit l'équation de Lagrange en θ

$$\frac{d}{dt}[\theta' \Phi(t)] + \frac{F(\theta) F'(\theta)}{\Phi(t)} = 0,$$

équation que l'on intégrerait bien facilement, sans rien préciser, au moyen du changement de variable

$$\mathfrak{T} = \int \frac{dt}{\Phi(t)},$$

la ramenant à la forme bien connue

$$\mathcal{F}(\theta'', \theta) = 0.$$

Le fait que le problème admet bien évidemment, comme le problème d'Euler, toutes les intégrales R autour du point fixe conduit à prendre pour axe fixe Oz_1 la position initiale du moment résultant en O de la quantité de mouvement. Cette particularisation se traduit ici par

$$\frac{p_0 \Phi(t_0)}{\sin\theta_0 \sin\varphi_0} = \frac{q_0 \Phi(t_0)}{\sin\theta_0 \cos\varphi_0} = \frac{C r_0}{\cos\theta_0},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\theta'_0 = 0,$$

puis

$$\psi'_0 = \frac{C r_0}{\Phi(t_0)\cos\theta_0},$$

c'est-à-dire

$$C r_0 - \lambda \cos\theta_0 = 0$$

ou

$$F'(\theta_0) = 0.$$

En vertu de cette condition, on voit immédiatement que l'équation en θ admet la solution

$$\theta = \text{const.} = \theta_0,$$

qui, répondant aux conditions initiales θ_0 et $\theta'_0 = 0$, est la solution cherchée.

Les deux intégrales immédiates donnent alors

$$\psi' = \frac{H}{\Phi(t)}, \qquad \varphi' = r_0 + \frac{K}{\Phi(t)},$$

H et K étant deux constantes, donc

$$\psi = H\mathfrak{T} + \text{const.}, \qquad \varphi = r_0 t + K\mathfrak{T} + \text{const.},$$

$\mathfrak{T}$ étant le temps auxiliaire défini plus haut par une quadrature. Le problème général est donc terminé sans avoir eu à faire la moindre intégration effective d'équation différentielle.

Dans la quatrième Partie, on demandait d'étudier le cas de $r_0 = 0$. L'intégrale relative à φ' montre que r est constamment nulle, donc le cône roulant de la représentation du mouvement du solide est ici le plan des xy.

Les composants p_1, q_1, r_1 de la rotation sur les axes fixes donnent alors

$$p_1^2 + q_1^2 = \varphi'^2 \sin^2\theta, \qquad r_1 = -\frac{\varphi' \sin^2\theta}{\cos\theta};$$

donc la rotation fait avec Oz_1 l'angle constant $\frac{\pi}{2} - \theta$ et le cône fixe est de révolution autour de Oz_1. On a donc le roulement d'un plan sur un cône de révolution, mais ce roulement n'est pas uniforme, il ne se fait pas proportionnellement à t, mais à $\mathfrak{T}$.

Quand, comme dans la cinquième Partie, on précise la fonction z, c'est-à-dire, en définitive, la fonction $\Phi(t)$, le seul résultat qui en découle est l'expression explicite de $\mathfrak{T}$, d'ailleurs complètement inutile pour la suite.

Si, comme cela existe pour la loi donnée dans l'énoncé, les insectes ont un mouvement asymptotique, la fonction $\Phi(t)$ tend asymptotiquement vers une valeur finie et non nulle, de sorte que φ' et ψ' tendent vers des valeurs asymptotiques et que φ et ψ croissent indéfiniment.

Si, en outre, nous considérons les expressions

$$r = \text{const.}, \qquad p^2 + q^2 = \psi'^2 \sin^2\theta,$$
$$r_1 = \frac{r_0 - \varphi' \sin^2\theta}{\cos\theta}, \qquad p_1^2 + q_1^2 = \varphi'^2 \sin^2\theta,$$

nous voyons qu'elles tendent vers des valeurs asymptotiques finies, donc que les deux cônes sont asymptotes à deux cônes de révolution et que le mouvement du solide tend asymptotiquement vers le roulement uniforme d'un cône de révolution sur un autre cône de révolution.

La valeur asymptotique de ψ' n'est jamais nulle, mais celle de φ' peut l'être. Alors p_1 et q_1 tendent vers zéro, le cône fixe est asymptote à Oz_1 et le mouvement du solide tend vers une rotation uniforme autour de Oz_1.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

424.

(1858, p. 33; 1916, p. 518.)

Étant données les erreurs absolues α, β, γ commises sur la mesure des côtés d'un triangle sphérique, en calculer les effets sur les angles. CAILLET.

SOLUTION

Par M. H. DE MONTILLE.

Cette question reçoit une indication de solution même dans certaines Trigonométries (*Traité de Trigonométrie*, de Serret, dernier Chapitre) sous forme de formules différentielles déduites des relations fondamentales, de même que dans des cours connus d'Astronomie théorique et des cours d'Écoles. Voici une réponse :

Traitons les erreurs α, β, γ en différentielles respectives des

variables indépendantes a, b, c. L'erreur ΔA commise sur l'angle A opposé à a, peut, dans ce qui suit, être remplacée par la différentielle dA (le reste de la série de Taylor étant alors de second ordre).

Or la différentiation de la formule classique

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

mise sous la forme

$$(1) \qquad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

donne

$$\begin{aligned}- \sin A\, dA = - \frac{\sin a . da}{\sin b \sin c} &+ \frac{\sin a}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &+ [\sin c (\cos c - \cos a \cos b) \\ &\quad + \sin b (\cos b - \cos a \cos c)],\end{aligned}$$

ou, sous forme abrégée, à l'aide de deux relations homologues à (1) :

$$(2) \qquad \frac{\sin A}{\sin a} \sin b \sin c\, dA = da - \cos C\, db - \cos B\, dc.$$

Sous cette forme classique, ainsi que dans les deux équations pareilles donnant dB et dC, on doit, par la pensée, remplacer au deuxième membre les cosinus des angles par leurs valeurs explicites (1) en a, b, c.

Quant à $\frac{\sin A}{\sin a}$, valeur commune des rapports de la relation des sinus, pour avoir son expression symétrique et explicite en a, b, c, il suffit de multiplier entre eux $2 \cos^2 \frac{A}{2}$ et $2 \sin^2 \frac{A}{2}$ donnés par les formules de Borda [celles-ci s'obtiennent en faisant la somme, puis la différence membre de la relation (1) avec l'identité $1 = 1$]. Posant $2s = a + b + c$, on trouve

$$\begin{aligned}(3) \qquad \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} &= \frac{1}{\sin^2 a} 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \\ &= \frac{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \left(\frac{\Omega}{\sin a \sin b \sin c} \right)^2\end{aligned}$$

en posant

$$(4) \qquad \Omega^2 = \sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c),$$

Ω ainsi défini (4) explicitement au signe près, le problème proposé est résolu par le système des trois équations (5) suivantes, jointes à (1) et (4) :

$$(5)\quad \begin{cases} \Omega\, dA = \sin a\,(\alpha - \beta\cos C - \gamma\cos B), \\ \Omega\, dB = \sin b\,(\beta - \gamma\cos A - \alpha\cos C), \\ \Omega\, dC = \sin c\,(\gamma - \alpha\cos B - \beta\cos A). \end{cases}$$

Les transformations bien connues qui viennent de donner cette solution résoudraient aussi, par les propriétés du triangle polaire, le problème, sans analogue en trigonométrie rectiligne, étant donnés les trois angles et leurs erreurs de mesure, de déterminer les *côtés* du triangle sphérique avec l'erreur moyenne qui les affecte (les transformées des formules de Borda donnant les côtés).

L'utilisation *pratique* des formules (5) suppose qu'on résolve au préalable, au moins approximativement, le triangle, pour avoir dA, dB, dC : les formules de résolution de Borda donneront le calcul de Ω tout préparé. Si l'on se passe de Ω, connaissant A, B, C, c'est la formule (2) qu'on appliquera.

L'énoncé est muet sur les erreurs relatives, ce qui simplifie la discussion. Si l'un des côtés a a son sinus infiniment petit (a voisin de O ou de π), on sait géométriquement que $\sin A$ l'est aussi, ainsi que $b - c$. On est alors mal éclairé par les formules (5), ce qui est naturel puisqu'une inconnue A (ou plutôt $\sin A$) tombe au rang de grandeur des erreurs; seules des erreurs relatives bien spécifiées préciseraient le problème.

Et même alors, le cas des trois côtés infiniment petits, le plus intéressant en Géodésie, se ramenant, par la méthode de Legendre, à un triangle rectiligne ayant pour angles les dièdres corrigés du tiers de l'excès sphérique, la question fait retour à la trigonométrie rectiligne.

592.

(1861, p. 216; 1916, p. 519.)

Soit un cylindre circonscrit à une surface de révolution; de chaque point de la ligne de contact, on abaisse des perpendiculaires sur l'axe; on obtient une surface gauche; circonscrivons à cette surface un second cylindre;

coupant les deux cylindres par un plan, la section du second cylindre est la développée de la section du premier cylindre. M. Dunesme.

Solution

Par M. M. Faucheux.

Le théorème énoncé sous cette forme générale est évidemment faux; s'il est vrai pour un plan particulier, il n'est pas vrai pour un plan quelconque. Nous allons le vérifier dans le cas où le deuxième cylindre a ses génératrices parallèles à celles du premier, les deux cylindres étant coupés par un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de révolution.

Prenons cet axe pour axe des z; pour plan des xz un plan parallèle à la direction des génératrices. Soient

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = f(\rho)$$

es équations de la surface de révolution. Soient α, β, γ les cosinus directeurs des génératrices.

Des calculs simples donnent pour la courbe de contact

$$\gamma = \alpha f'(\rho)\cos\theta,$$

et pour la trace du plan tangent le long de cette courbe sur le plan des xy

$$(1) \qquad \mathrm{X}\cos\theta + y\sin\theta + \frac{f(\rho)}{f'(\rho)} = \rho = 0.$$

D'autre part, la surface gauche a pour équations

$$x = x, \qquad y = x\,\mathrm{tang}\,\theta, \qquad z = f(\rho),$$

ρ et θ étant liés par la même relation que plus haut.

De nouveaux calculs montrent que le long de la courbe de contact on a

$$x = \frac{\gamma\,\mathrm{tang}^2\theta}{df''(\rho)}$$

et que la trace du plan tangent a pour équation

$$(2) \qquad \mathrm{X}\sin\theta - \mathrm{Y}\cos\theta + \frac{\alpha}{\gamma}\sin\theta f(\rho).$$

L'équation (2) représente une droite perpendiculaire à la droite (1) et est précisément celle à laquelle on parvient en différentiant (1) par rapport aux paramètres qui y figurent; donc la droite (2) qui est tangente à la section du second

cylindre est normale à l'enveloppe de (1), c'est-à-dire à la section du premier cylindre, ce qui démontre la proposition.

598.

(1851, p. 216.)

Pour quelle longitude ⊙ du Soleil le temps que son disque met à traverser le méridien est-il ou maximum ou minimum? DUNESME.

SOLUTION ET BIBLIOGRAPHIE

Par M. H. DE MONTILLE.

Il y a longtemps que le Recueil didactique intitulé *Exercices astronomiques* (1889, édit. Hermann, p. 297), par L.-J. Gruey, directeur de l'Observatoire à Besançon, a rangé et résolu cet exercice comme question courante d'astronomie sphérique.

En appelant, avec cet auteur, $\mathcal{D}$ la déclinaison du Soleil par rapport à l'équateur vrai, $\mathcal{A}$ son ascension droite vraie, $d\mathcal{A}$ la variation de $\mathcal{A}$ pour une heure de temps moyen, r le rayon vecteur de l'orbite terrestre (mesuré avec l'unité astronomique très voisine du vecteur moyen), Δ_0 le diamètre apparent du Soleil à l'unité astronomique de distance, θ_s la durée sidérale, en secondes, du passage du *demi*-diamètre, et m une constante, l'auteur établit d'abord, à l'exercice 126, que θ_s s'exprime par $\Delta \operatorname{séc} \mathcal{D} \dfrac{1}{1-\mu}$, Δ étant le diamètre angulaire au moment de l'observation. Cela résulte avec évidence, si l'on met à part le facteur $\dfrac{1}{1-\mu}$, de la considération du triangle sphérique formé, pour l'observateur, par la trace de l'axe des pôles géographiques sur la sphère céleste, le centre du Soleil et un point de contact méridien. D'ailleurs μ est la dérivée $\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$ de $\mathcal{A}$ par rapport au temps.

A l'exercice 127, la relation prend la forme

$$(\text{M}) \qquad \theta_s = \frac{\Delta_0}{15}\,\frac{1}{r\cos\mathcal{D}}\left(1+\frac{m}{r\cos\mathcal{D}}\right),$$

qui montre que la durée du passage du disque est :

1° *maxima* quand $r\cos\mathcal{D}$ est *minimum ;*

2° *minima* quand $r\cos\mathcal{D}$ est *maximum.*

La constante m est $m = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2 \cos I}}{12 \times 3600 \times 366,2422}$ (a est le demi-grand axe de l'orbite terrestre, e son excentricité actuelle, I l'obliquité vraie de l'écliptique). Et $2\theta_s$ représente alors la durée correspondante du passage.

Remarques. — I. Ici s'arrêtent les indications succinctes de cet auteur.

L'astronome, vu l'impossibilité d'exprimer en termes finis, non seulement les racines en $\odot$ de l'équation $\frac{\partial}{\partial t}(r \cos \mathbb{D}) = 0$, mais même toutes les équations où le temps serait inconnue explicite, n'a admis évidemment, pour obtenir l'inconnue, soit $\odot$, soit le temps t, que les méthodes d'approximation usuelles en astronomie.

Il a déjà fait une approximation, très légitime, en remplaçant, dans ce qui précède, $\frac{1 - \mu}{1}$ par $1 + \mu_1$.

II. *Équations de résolution.* — Nous arriverions aux équations de résolution de la manière suivante (en prenant la notation δ plus usuelle que $\mathbb{D}$) :

$$(1) \qquad (r \cos \delta)'_t = r'_t \cos \delta - r \sin \delta'_t = 0;$$

$$(2) \qquad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\odot - \varpi)},$$

ϖ étant la longitude du périgée dans l'orbite apparente du Soleil.

Or la relation des sinus appliquée au triangle-rectangle que forment la longitude, l'ascension droite et la déclinaison donne :

$$(3) \qquad \sin \delta = \sin \odot \sin I;$$

donc

$$(4) \qquad \cos \delta \, \delta'_t = \sin I \cos \odot \, \odot'_t.$$

Et la relation (1) devient, en tenant compte successivement de (4), de (3) :

$$\frac{r'_t}{r} t \cos^2 \delta = \sin \delta \sin I \cos \odot \, \odot'_t = \frac{1}{2} \sin^2 I \sin 2 \odot \, \odot'_t.$$

Or, la différentiation logarithmique de (2) donnera

$$(2)' \qquad \frac{r'}{r} = \frac{e \sin(\odot = \varpi)}{1 + e \cos(\odot - \varpi)},$$

d'où

$$(5) \qquad e \sin(\odot - \varpi)(1 - \sin^2 I \sin^2 \odot) = \frac{1}{2} \sin^2 I \sin 2\odot \, [1 + e \cos(\odot - \varpi] \, \odot'_t.$$

On peut, dans l'équation finale (5), exprimer $\odot'_t$ par la dérivée d'une série de Lagrange, bien connue, donnant l'anomalie vraie en fonction du temps, et résoudre, comme il est dit ci-dessus, par approximations successives, soit par la méthode de Newton, soit par celle de Gauss, l'équation transcendante (5). Il est évident, en effet, que la dérivée de l'anomalie vraie par rapport au temps est identique à celle de la longitude écliptique vraie.

En définitive, on sera amené, pour une année entière, à calculer deux *maxima* de θ_s presque confondus avec les solstices, et deux *minima*, l'un suivant de près d'une semaine l'équinoxe de mars, l'autre précédent d'autant l'équinoxe de septembre.

Partant de cette approximation presque évidente a[illegible] la formule (M), ou de l'intervalle un peu plus resserr[illegible] la *Connaissance des Temps*, on aboutira, quand les dernières valeurs se confondront, à quatre racines en t qui supposent le mouvement rigoureusement elliptique ou képlérien. Et si l'on veut tenir compte des perturbations, on en corrigera r, $\odot$, $\odot'$, δ dans les équations (4) et (2)′, ce qui conduit à une équation (5) rectifiée.

En dernière approximation, on a quatre racines t_1, t_2, t_3, t_4 en temps. On en déduira, par les éphémérides, les valeurs de $\odot$ toutes affectées des effets d'aberration en angle et en temps, de la précession et de la nutation.

Il est bien évident que, à chacune des époques rigoureuses trouvées correspond un méridien véritable, lieu des points terrestres qui verront précisément le passage à l'instant du maximum ou du minimum.

Toutefois, la durée du passage $2 \frac{\Delta_0}{15} \frac{1}{r \cos \delta} \left(1 + \frac{m}{r \cos \delta}\right)$ n'a été exprimée que pour une observation géocentrique. La durée locale en un lieu doit être corrigée de la parallaxe en

déclinaison. Alors, en appelant L la latitude géocentrique réduite du lieu, ϖ la parallaxe du Soleil et ρ son rayon équatorial, on appliquerait la correction usuelle $\frac{\rho}{r}\varpi \sin(\delta - L)$.

En ce qui concerne l'observation qui ne change pas de place, les zones terrestres qui ont, par moments, deux passages du Soleil en 24 heures (régions polaires) resserrent au maximum l'intervalle entre la date rigoureuse calculée et la date réelle d'un passage méridien pour l'observatoire fixe.

617.

(1863, p. 156; 1916, p. 519).

Théorème. — *Soit $w = u + iv$ une fonction monodrome et monogène : une courbe fermée d'équation $f(x, y) = 0$, dans le plan horizontal des indices de z : un cylindre vertical qui a $f(x, y)$ pour base; deux plans verticaux* P *et* P′ *rectangulaires. Supposons que w ne devienne ni nulle ni infinie dans l'intérieur de $f(x, y) = 0$, et que l'indice de z parcoure $f(x, y)$. Sur chaque génératrice du cylindre portons, à partir de la base, les longueurs u et v correspondantes; nous obtiendrons ainsi deux courbes* U *et* V. *L'aire de la projection de* U *ou de* V *sur le plan* P *est égale à l'aire de la projection de* V *ou de* U *sur* P.

Dewulf.

Solution

Par M. H. de Montille.

Sur la surface du cylindre (C) envisagé, considérons un élément d'aire courbe, compris entre la courbe de base (B), deux génératrices infiniment voisines, et les arcs de chacune des courbes (U) et (V) tracées sur (C). Soit ds l'élément d'arc de courbe de base (B) pour des accroissements élémentaires dx et dy : les aires infinitésimales découpées sur (C) ont respectivement pour parties principales $U\,ds$ et $V\,ds$.

Or, en menant les plans P et P′ par l'origine O, on ne perdra rien sur la généralité des conclusions concernant les projections des aires sur ces plans.

Donnons donc à ceux-ci, ainsi qu'à leurs traces sur le plan des xy, les équations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} (P) & X \equiv x\cos\omega + y\sin\omega, \\ (P') & Y \equiv x\sin\omega - y\cos\omega; \end{cases}$$

Les signes $\equiv$ d'identité ci-dessus définissent une transformation de coordonnées par rapport aux plans (P) et (P'), xOy : écrivons-la comme il suit :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= X\cos\omega - Y\sin\omega,\\ dx &= \cos dX - \sin\omega\, dY,\\ y &= X\sin\omega + Y\cos\omega,\\ dy &= \sin\omega\, dX + \cos\omega\, dY.\end{aligned}\right.$$

Cette substitution linéaire orthogonale $\left[\overline{(\text{module})}^2 = 1\right]$ est sans effet sur la valeur de l'élément d'arc de courbe

$$ds = \sqrt{dX^2 + dY^2} = dS,$$

qui a un rôle d'invariant, de même que le module $x^2 + y^2$ de z ou de $x + yi$, qui devient le module $X^2 + Y^2$ de $X + Yi = Z$. Il y a uniquement une différence d'argument, de ω, entre $z = x + yi$ et $Z = X + Yi$: en effet, les relations (2) donnent :

$$(3)\qquad x + yi = (\cos\omega + i\sin\omega)(X + Yi) = e^{\omega i}(X + Yi);$$

cela résulte de ce que les axes ont tourné de ω.

Je dis maintenant que la fonction w, monogène en x et y, se transforme en une fonction W monogène en X et Y. En effet, la monogénéité de w signifiant que w n'est fonction que de la combinaison $x + yi$, on voit que sa transformée W n'est aussi fonction que de la transformée de $x + yi$, c'est-à-dire de $e^{\omega i}(X + Yi)$ en vertu de l'égalité (2). En définitive, $e^{\omega i}$ étant constant, W n'est fonction que de $X + Yi$; W est donc monogène en X, Y.

Écrivons alors W sous la forme $W = K + Li$; et affectons de l'indice 1 toutes les variables et fonctions se rapportant à une même affixe considérée : x_1, y_1, z_1 ; X_1, Y_1, Z_1, etc. La transformation (2) entraîne

$$W_1 = w_1 ; \qquad K_1 = U_1 ; \qquad L_1 = V_1.$$

Or, l'aire élémentaire $U_1\, ds$ a pour projection

$$U_1\, ds\, \frac{dX}{dS} = U_1\, dX$$

sur le plan des X, puisque $ds = dS$; cette projection vaut

donc $K_1 dX$. On verra de même que $L_1 dY$ est la projection de l'aire $V_1 ds$ sur le plan des Y.

Et pour un contour fini allant, sur la base (B) de z_0 à z, ou de Z_0 à Z, les aires projetées correspondantes seront

$$(4)\qquad \int_{Z_0}^{Z} K\,dX \qquad \text{et} \qquad \int_{Z_0}^{Z} L\,dY.$$

Prenons la dérivée de chacune de ces expressions d'aires par rapport à la variable qui donne son nom à l'axe bordant l'aire. En différentiant sous le signe d'intégration, ces dérivées seront

$$(4)'\qquad \int_{Z_0}^{Z} \frac{\partial K}{\partial X}\,dX \qquad \text{et} \qquad \int_{Z_0}^{Z} \frac{\partial L}{\partial Y}\,dY.$$

Or, les deux dérivées partielles sous le signe $\int$ sont précisément égales, leur égalité exprimant une des deux conditions de monogénéité de $W = K + Li$, qu'on vient de montrer monogène. Par suite, les dérivées (4)′ étant égales, leurs fonctions primitives (4) ne diffèrent que par une constante, cette constante est d'ailleurs nulle, nos aires projetées étant nulles à la génératrice initiale.

[illegible] une condition de monogénéité de W prouverait l'égalité, au signe près, des aires obtenues en intervertissant les plans sur lesquels on projette.

Autre solution par M. M. Faucheux.

693.

(1864, p. 159.)

Trouver l'équation des courbes parallèles aux ovales de Descartes. Strebor.

Solution

Par M. H. Brocard.

Cette question de *Strebor* (William Roberts), proposée en 1864, paraît remonter au moins à l'année 1863. Sa solution analytique entraînerait certainement à une très grande complication, et il est parfaitement légitime de croire que W. Roberts en avait rencontré une solution géométrique.

Cette induction est singulièrement corroborée par l'étude parue ici *Sur les surfaces d'égale pente*, par M. A. Myller

(1917, p. 413-420), dont la conclusion donne, en effet, pour la solution désirée, l'élégante proposition que les courbes parallèles aux ovales de Descartes admettent une triple génération par cercles dont les centres décrivent un cercle fixe et dont les rayons sont proportionnels aux distances des centres à un autre cercle fixe.

Si ce résultat avait été déjà au moins partiellement obtenu par W. Roberts, cela aura pu lui suggérer la question **693**, puisqu'elle paraît ainsi abordable par l'analyse.

Je n'ai pas poussé plus loin cette investigation, mais il est à croire que cette remarque donnera des facilités nouvelles pour y parvenir depuis 54 ans que la question **693** a été proposée.

880.

(1868, p. 239; 1917, p. 158.)

P *étant le produit des entiers inférieurs et premiers au nombre* N, *la différence* P − 1 *est divisible par* N *si* N *n'est ni premier, ni le double d'un nombre premier, ni une puissance d'un nombre premier impair, ni le double d'une telle puissance.* LIONNET.

SOLUTION

Par M. H. DE MONTILLE.

Serret, dans son *Traité d'Algèbre supérieure*, énonce et démontre ce théorème, sous le titre général de théorème de Wilson généralisé, sans mentionner d'attribution de priorité ou de découverte. C'est au Tome II (§ 296, p. 37) qu'on lit cet énoncé, dont le n° **880** n'est qu'une partie :

Si P *désigne le produit des* $\varphi(M)$ *nombres premiers avec* M et *non supérieurs à* M, *on a* $P \equiv \pm 1 \pmod{M}$, *c'est-à-dire que* P *donne le même reste de division par* M *que* ± 1, *savoir :*

$P \equiv -1$, si M est égal à une *puissance d'un nombre impair, ou égal au* DOUBLE *d'une telle* PUISSANCE, *ou égal à* 4; *et* $P \equiv +1 \pmod{M}$ — c'est l'énoncé **880** — *dans tous les autres cas.*

La démonstration que donne Serret, débarrassée de la notation et du langage des congruences, est très élémentaire. Je la résume, avec ses notations simplifiées :

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les $\varphi(M)$ nombres premiers avec M et

non supérieurs à M (et a un nombre arbitraire de cette suite). Considérons les restes des divisions, par M, de leurs produits par un nombre a : $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$, ... Ces restes reproduiront dans un certain ordre les nombres α, β, γ, ... eux-mêmes. En particulier, 1 et M — 1 y figurent. Considérons le produit $a\alpha$ qui donne pour reste 1 ; Serret appelle a et α des *associés* du premier genre, si $a \neq \alpha$. Si $a = \alpha$, avec 1 pour reste du produit $a^2 = a\alpha$, on voit que -1 (ou M — 1 qui lui est équivalent) est le reste de $a(M - a)$: a et α sont alors associés du second genre, et sont alors racines conjuguées de l'équation $x^2 - 1 = m^e$ de M : elles forment μ couples.

Or, le produit de tous les nombres du premier genre est de la forme $m^e\,M + 1$.

Celui de tous les nombres du second genre est $m^e\,M + (-1)^\mu$.

Donc P — 1, *si* μ *est pair, est multiple de* M.

Or, dans les seules hypothèses que nous laisse Lionnet pour résoudre en entiers $x^2 - 1 = m^e$ de M, ou

$$(1) \qquad (x-1)(x+1) = m^e \text{ de } M,$$

[illegible] doit être de la forme $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$, n étant au moins égal [illegible]

De plus, si a_1 est 2 et $\alpha_1 = 1$, il faut, par hypothèse, $n > 2$. — Serret fait *remarquer qu'il faut exclure*, en plus, M égal à 4.

Il s'agit de montrer que, cela posé, μ est pair : le raisonnement de Serret (t. II, § 297) se base sur ce que, d'après l'équation (1), le nombre des couples de valeurs conjuguées de x est le nombre de décompositions de M en deux facteurs A et B ayant au plus 2 pour plus grand commun diviseur :

1° Si le facteur 2 est absent, ce nombre est

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots = 2^n = \mu.$$

2° Si $a_1^{\alpha_1} = 2$, la parité reste la même en ne considérant que les autres facteurs, et μ est encore puissance de 2.

2° Si $M = 2^k m$, m étant le type de nombres de la première hypothèse, on ne change pas la parité, en comptant les décompositions de m, soit 2^ν ; puis, en affectant les deux facteurs de m des facteurs $2^{k-1}, 2$ ou $2, 2^{k-1}$. Cette dernière opération n'ajoute rien si $k = 2$. Si, de plus $m = 1$, c'est le cas

de $M = 4$, où μ est impair, exception que mentionne Serret. Si m, premier avec 2, est quelconque et $K > 2$, μ est pair.

1446.

(1883, p. 240; 1916, p. 393.)

Les nombres de Bernoulli et d'Euler, définis symboliquement par les relations

$$(B+1)^p - B^p = 0,$$
$$(\varepsilon+1)^p + (\varepsilon-1)^p = 0,$$

satisfont aux relations symboliques

$$(2B+1)^p = (2-2^p)B_p,$$
$$(4B+1)^p = (2-2^p)B_p - p\varepsilon_{p-1},$$
$$(4B+3)^p = (2-2^p)B_p + p\varepsilon_{p-1}.$$

E. Cesaro.

SOLUTION
Par M. L. Poli.

On peut voir dans Lucas (*Théorie des nombres*, p. 242) la relation

$$(Bx)^p + (Bx+1)^p + \ldots + (Bx+x-1)^p = xB_p.$$

On en déduit pour $x = 2$

$$(1) \qquad (2B+1)^p = (2-2^p)B_p;$$

puis, pour $x = 4$,

$$4^p B_p + (4B+1)^p + 2^p(2B+1)^p + (4B+3)^p = 4B_p;$$

d'où, à cause de (1),

$$(2) \qquad (4B+1)^p + (4B+3)^p = 2(2-2^p)B_p.$$

D'autre part, on a (*Ibid.*, p. 258 et p. 251)

$$p\,\varepsilon_{p-1} = (2B+1)^p - (4B+1)^p$$

qui, avec (1) et (2), donnent les deux autres relations demandées.

[H5a]

RÉDUCTION A UNE FORME NORMALE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS;

Par M. H. VOGT.

1. Nous emploierons le symbole D pour représenter la dérivée $\frac{d}{dx}$ [1], et nous écrirons une expression différentielle linéaire et homogène

$$a_0 \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{dy}{dx} + a_m y$$

sous la forme symbolique

$$(a_0 \mathrm{D}^m + a_1 \mathrm{D}^{m-1} + \ldots + a_{m-1} \mathrm{D} + a_m) y.$$

Nous étudierons un système de n équations différentielles linéaires simultanées à n fonctions inconnues, que nous écrirons sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}(\mathrm{D}) y_1 + a_{12}(\mathrm{D}) y_2 + \ldots + a_{1n}(\mathrm{D}) y_n = u_1, \\ a_{21}(\mathrm{D}) y_1 + a_{22}(\mathrm{D}) y_2 + \ldots + a_{2n}(\mathrm{D}) y_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}(\mathrm{D}) y_1 + a_{n2}(\mathrm{D}) y_2 + \ldots + a_{nn}(\mathrm{D}) y_n = u_n; \end{array}\right.$$

nous supposerons que les seconds membres sont des fonctions connues de x, que les coefficients $a_{ij}(\mathrm{D})$ des inconnues sont des polynomes à coefficients constants.

[1] Les conditions dans lesquelles peut être utilisé le symbole D et la légitimité des opérations effectuées sur les fractions rationnelles de ce symbole sont discutées et précisées dans un article : *Sur le calcul symbolique et ses applications à l'intégration des équations différentielles de l'électrotechnique* (*Revue générale de l'électricité*, t. II, p. 483 et 563).

et nous nous limiterons au cas où le déterminant de ces coefficients

$$\Delta(D) = |a_{ij}(D)| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

est différent de zéro, nous réservant d'examiner plus tard le cas où il est identiquement nul. Nous montrerons que le système (1) est équivalent à un autre système d'équations différentielles renfermant chacune une seule fonction inconnue, la somme des ordres de ces équations étant égale au degré de $\Delta(D)$; nous nous appuierons pour cela sur le lemme suivant :

En composant symboliquement les équations (1) *avec les éléments d'un système de polynomes entiers*

$$a'_{ij}(D) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

dont le déterminant $\Delta'(D)$ *se réduit à l'unité, on forme un système d'équations*

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{j=n}\left(\sum_{k=1}^{k=n} a'_{ik} a_{kj}\right) y_j = \sum_{k=1}^{k=n} a'_{ik} u_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

équivalent au premier.

Cela résulte de ce que le système (1) se déduit inversement des équations (2) en composant ces dernières avec les éléments du système complémentaire de $a'_{ij}(D)$, et tous ces éléments sont des polynomes entiers; toute solution du système (1) satisfait au système (2) et réciproquement.

2. Considérons le déterminant $\Delta(D)$ des coefficients a_{ij}; désignons par $\Delta_1(D)$ le plus commun diviseur de ses mineurs relatifs aux éléments de la première colonne, et d'une manière générale par $\Delta_j(D)$ le plus grand

commun diviseur des mineurs de $A(D)$ ne renfermant aucun élément des j premières colonnes, mineurs d'ordre maximum tirés de la matrice

$$M_j = \| a_{ij+1} a_{ij+2} \dots a_{in} \| \qquad (i = 1, 2, \dots, n);$$

nous obtenons une suite de polynomes auxquels nous adjoignons $A_n(D) = 1$: cette suite

$$A(D), \quad A_1(D), \quad A_2(D), \quad \dots, \quad A_n(D)$$

est telle que chacun de ses termes divise le précédent : nous formons ensuite les quotients successifs

$$d_1(D) = \frac{A(D)}{A_1(D)}, \quad d_2(D) = \frac{A_1(D)}{A_2(D)}, \quad \dots, \quad d_n(D) = \frac{A_{n-1}(D)}{A_n(D)}$$

dont le produit est égal à $A(D)$.

Les mineurs A_{i1} de A relatifs aux éléments de la première colonne ont pour plus grand commun diviseur A_1 : on sait calculer par des opérations élémentaires des polynomes entiers que nous appellerons $b_{i1}(D)$ tels que l'on ait identiquement

$$b_{11} A_{11} + b_{21} A_{21} + \dots + b_{n1} A_{n1} = A_1 :$$

nous pouvons écrire le premier membre sous forme d'un déterminant que nous appelons B, et qui est

$$B = | b_{i1} a_{i2} a_{i3} \dots a_{in} | = A_1.$$

Considérons de même les $\frac{n(n-1)}{2}$ mineurs

$$\frac{\partial^2 A}{\partial a_{h1} \partial a_{k2}} \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n;\ h > k)$$

tirés de la matrice

$$M_2 = \| a_{i3} a_{i4} \dots a_{in} \|$$

mineurs qui ont pour plus grand commun diviseur A_2 :

nous savons calculer des polynomes entiers l_{hk} tels que l'on ait

$$\sum l_{hk} \frac{\partial^2 A}{\partial a_{h1}\, \partial a_{k2}} = A_2 ;$$

par analogie, nous écrirons le premier membre de cette égalité sous la forme d'un déterminant que nous appellerons C et que nous écrirons

$$C = | c_{i1} c_{i2} a_{i3} \ldots a_{in} | = A_2.$$

Nous introduisons, dans l'écriture de ce déterminant C, $2n$ éléments c_{i1}, c_{i2}, qui ne sont pas déterminés complètement par les conditions précédentes; *leur existence sous forme de polynomes n'est même nullement prouvée*, *mais elle n'est pas nécessaire;* nous n'aurons en effet à utiliser, dans les calculs ultérieurs, que des développements de déterminants suivant la règle de Laplace, et que les déterminants du second ordre tirés de la matrice

$$\| c_{i1} c_{i2} \|,$$

ces déterminants sont précisément les polynomes l_{hk}. Il en est de ces éléments c comme des racines imaginaires ou idéales de certaines équations dont les fonctions symétriques interviennent seules dans les calculs.

De la même manière, nous considérons les mineurs de A tirés de la matrice

$$M_3 = \| a_{i4} a_{i5} \ldots a_{in} \|,$$

mineurs ayant pour plus grand commun diviseur A_3; nous savons calculer des polynomes entiers dont les produits par ces mineurs ont une somme égale à A_3; ces polynomes peuvent être considérés comme les déterminants du troisième ordre tirés d'une matrice

$$\| d_{i1} d_{i2} d_{i3} \|$$

et entrant dans un déterminant que nous appellerons D, tel que l'on ait

$$D = | d_{i1} d_{i2} d_{i3} a_{i4} \dots a_{in} | = A_3.$$

l'existence et le rôle des éléments d donnant lieu aux mêmes remarques que pour les éléments c.

Nous continuerons de la même manière jusqu'au plus grand commun diviseur A_{n-1} des éléments a_{in}, et jusqu'à un déterminant H ayant pour valeur

$$H = | h_{i1} h_{i2} \dots h_{in} a_{in} | = A_{n-1}.$$

3. Nous considérerons les déterminants successifs

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad \dots, \quad H$$

et les mineurs du premier ordre de chacun d'eux par rapport aux éléments a de la première de leurs colonnes qui renferme ces éléments ; nous formerons ainsi un tableau de polynomes entiers :

$$\begin{array}{ccccc} A_{11} & B_{12} & C_{13} & \dots & H_{1n}, \\ A_{21} & B_{22} & C_{23} & \dots & H_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. \\ A_{n1} & B_{n2} & C_{n3} & \dots, & H_{nn} \end{array}$$

dont les éléments de la première colonne sont divisibles par A_1, ceux de la deuxième par A_2, et ainsi de suite. nous effectuerons les quotients de ces éléments par ces diviseurs respectifs, et nous obtiendrons un nouveau tableau dont nous désignerons le déterminant par

$$\Delta = \left| \frac{A_{i1}}{A_1} \frac{B_{i2}}{A_2} \dots \frac{H_{in}}{A_n} \right|.$$

Ce déterminant est égal à l'unité; si nous le multiplions en effet par le déterminant $A(D)$, nous

obtenons pour le produit la valeur

$$\Delta\mathrm{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mathrm{A}_1}\Sigma \mathrm{A}_{i1}a_{i1} & \frac{1}{\mathrm{A}_1}\Sigma \mathrm{A}_{i1}a_{i2} & \dots & \frac{1}{\mathrm{A}_1}\Sigma \mathrm{A}_{i1}a_{in} \\ \frac{1}{\mathrm{A}_2}\Sigma \mathrm{B}_{i2}a_{i1} & \frac{1}{\mathrm{A}_2}\Sigma \mathrm{B}_{i2}a_{i2} & \dots & \frac{1}{\mathrm{A}_2}\Sigma \mathrm{B}_{i2}a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\mathrm{A}_n}\Sigma \mathrm{H}_{in}a_{i1} & \frac{1}{\mathrm{A}_n}\Sigma \mathrm{H}_{in}a_{i2} & \dots & \frac{1}{\mathrm{A}_n}\Sigma \mathrm{H}_{in}a_{in} \end{vmatrix}$$

les sommes étant effectuées pour les valeurs de i égales à $1, 2, \dots, n$.

Mais, dans ce produit, les éléments de la diagonale principale sont respectivement égaux à

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1} = d_1, \qquad \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} = d_2, \qquad \dots, \qquad \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{\mathrm{A}_n} = d_n;$$

ceux qui sont à droite de cette diagonale sont tous nuls comme développements de déterminants ayant deux colonnes identiques : on voit donc que le produit $\Delta\mathrm{A}$ est égal à $d_1, d_2, \dots d_n$ ou A, par conséquent Δ est égal à l'unité.

Les autres éléments du déterminant $\Delta\mathrm{A}$ nous seront utiles ; ce sont des polynomes entiers qui peuvent s'exprimer sous forme de déterminants et que nous désignerons par α_{ij} $(i > j)$; ils ont pour valeurs

$$\alpha_{21} = \frac{1}{\mathrm{A}_2}|b_{i1}a_{i1}a_{i3}a_{i4}\dots a_{in}|,$$

$$\alpha_{31} = \frac{1}{\mathrm{A}_3}|c_{i1}c_{i2}a_{i1}a_{i4}\dots a_{in}|,$$

$$\alpha_{32} = \frac{1}{\mathrm{A}_3}|c_{i1}c_{i2}a_{i2}a_{i4}\dots a_{in}|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_{nn-1} = \frac{1}{\mathrm{A}_n}|h_{i1}h_{i2}\dots h_{in-1}a_{in-1}|.$$

4. Puisque le déterminant Δ est égal à l'unité, la

composition du système des équations (1) avec les éléments de ce déterminant fournit un système équivalent au premier : les coefficients des inconnues dans les premiers membres des nouvelles équations sont précisément égaux aux éléments du déterminant $\Delta\Lambda$ que nous venons de calculer ; quant aux seconds membres, ils sont respectivement égaux à

$$\sum_i \frac{A_{i1}}{\Lambda_1} u_i, \quad \sum_i \frac{B_{i2}}{\Lambda_2} u_i, \quad \ldots, \quad \sum_i \frac{H_{in}}{\Lambda_n} u_i ;$$

ils peuvent du reste être écrits sous forme de déterminants et nous les désignerons par

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\Lambda_1} | u_i \ a_{i2} a_{i3} a_{i4} \ldots a_{in} |, \\
v_2 &= \frac{1}{\Lambda_2} | b_{i1} \ u_i \ a_{i3} a_{i4} \ldots a_{in} |, \\
v_3 &= \frac{1}{\Lambda_3} | c_{i1} \ c_{i2} \ u_i \ a_{i4} \ldots b_{in} |, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\
v_n &= \frac{1}{\Lambda_n} | h_{i1} h_{i2} \ldots h_{in-1} u_i |.
\end{aligned}$$

Finalement, le système des équations données (1) est équivalent au système

$$(3) \quad \begin{cases}
d_1(D) y_1 = v_1, \\
\alpha_{21}(D) y_1 + d_2(D) y_2 = v_2, \\
\alpha_{31}(D) y_1 + \alpha_{32}(D) y_2 + d_3(D) y_3 = v_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n1}(D) y_1 + \ldots + \alpha_{nn-1}(D) y_{n-1} + d_n(D) y_n = v_n,
\end{cases}$$

que nous dirons de *forme normale ;* en faisant passer dans les seconds membres les termes de coefficients α_{ij} nous arrivons au résultat suivant :

Lorsque le déterminant $\Lambda(D)$ *des coefficients des*

inconnues dans les équations données n'est pas nul, le système de ces équations est équivalent à un autre système de forme normale constitué par des équations successives

$$d_1(D)y_1 = w_1, \quad d_2(D)y_2 = w_2, \quad \ldots, \quad d_n(D)y_n = w_n;$$

le premier membre de chacune d'elles renferme une seule fonction inconnue; son second membre est une fonction déterminée des quantités données et des solutions des équations précédentes.

5. Nous terminerons par les remarques suivantes :

Remarque I. — La somme des ordres des équations de forme normale est égale au degré du déterminant $\Delta(D)$; le nombre des constantes arbitraires entrant dans la solution générale est égal à ce degré.

Remarque II. — Le nombre des constantes entrant dans y_1 est égal au degré de $d_1(D)$; comme on peut diriger le calcul de façon qu'une fonction quelconque donnée à l'avance entre dans la première des équations finales, on arrive à ce résultat :

Pour trouver le nombre des constantes dont dépend la valeur d'une fonction inconnue, on détermine le plus grand commun diviseur des mineurs du déterminant $\Delta(D)$ *par rapport aux coefficients de cette fonction; le nombre cherché est égal au degré par rapport à* D *du quotient de* $\Delta(D)$ *par ce plus grand commun diviseur.*

Remarque III. — Le cas le plus simple est celui où

les mineurs de $A(D)$ par rapport aux coefficients d'une inconnue sont des polynomes premiers entre eux dans leur ensemble; nous pouvons supposer que cette inconnue est y_1. Elle est alors fournie par la première équation normale

$$A(D)y_1 = v_1$$

et l'on obtient simplement cette équation en appliquant au système donné la règle de Cramer utilisée dans la résolution des équations algébriques linéaires.

Les autres fonctions inconnues sont ensuite déterminées sans aucune intégration nouvelle par des équations normales

$$y_2 = w_2, \qquad y_3 = w_3, \qquad \ldots, \qquad y_n = w_n,$$

dont les seconds membres sont des fonctions déterminées de y_1 et des quantités connues.

Remarque II. — Dans le cas général, on peut apporter des simplifications aux coefficients des équations (3) lorsque certains des polynomes $d(D)$ se réduisent à des constantes. Si, pour fixer les idées, $d_p(D)$ est une constante, y_p est déterminée sans intégration au moyen de $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$; on peut ensuite combiner l'équation de rang p avec chacune des suivantes, et annuler dans celles-ci le coefficient de y_p.

En résumé, on peut former des équations normales de la forme (3) de façon que les coefficients α_{ip} soient nuls pour toutes les valeurs de i dès que $d_p(D)$ est constant. Cette simplification peut du reste être obtenue *a priori* en choisissant convenablement les éléments $b, c, \ldots, h$ des déterminants B, C, ..., H.

[M¹5g]

LE THÉORÈME DE FEUERBACH DANS LES CUBIQUES;

Par M. MALGOUZOU,
Enseigne de vaisseau.

Soit (U) une cubique quelconque.

Il existe trois cubiques (U_1), (U_2), (U_3) dont (U) est la hessienne. J'appellerai ces cubiques les *antihessiennes* de (U). A chaque antihessienne correspond un des trois modes de correspondance des points de (U). Dans tout ce qui suivra, je ne considérerai qu'un seul mode de correspondance, par exemple celui relatif à l'antihessienne (U_1).

Soit Δ une droite quelconque coupant (U) aux points a, b, c, et admettant pour pôles relativement à (U_1) les quatres points P, Q, R, S. Les trois centres A, B, C du quadrangle PQRS appartiennent à (U) et sont respectivement les correspondants de a, b, c.

a B et C; b C et A; c A et B sont en ligne droite.

Il existe une conique tritangente à (U) aux points A, B, C. Cette conique est la poloconique de Δ relativement à (U_1); cette conique sera dite *associée* à Δ.

Considérons la transformation quadratique (T) admettant le triangle A B C comme triangle fondamental et les points P, Q, R, S pour points doubles:

Par la transformation (T), la cubique (U) se transforme en elle-même. Deux points correspondants de (U) sont deux points conjugués de cette transformation.

Toute conique (S), circonscrite au triangle A B C,

coupe la cubique (U) en trois autres points A′ B′ C′ qui sont aussi les points de contact d'une conique tritangente à (U).

Soient a', b', c' les correspondants respectifs de A′ B′ C′, ils appartiennent à une même droite Δ′ transformée de (S) dans la transformation (T).

A tout système de deux droites Δ et Δ′ correspond une conique (S).

Cercle d'Euler dans les cubiques. — Le lieu des points tels que leur conique polaire relativement à (U_1) soit une hyperbole équilatère est une droite.

Prenons cette droite pour droite (Δ) et la droite de l'infini pour droite (Δ′). Je dis que la conique (S) relative à ce système de deux droites est un cercle.

En effet, dans le cas considéré, le groupe de points P, Q, R, S forme un groupe orthocentrique. La transformation (T) devient une transformation isogonale. La conique (S), transformée de la droite de l'infini, est par suite le cercle circonscrit au triangle A B C.

J'appelle ce cercle *cercle d'Euler* par analogie avec le cas du triangle où la cubique (U) se réduit à trois droites. Aux points A, B, C correspondent les pieds des hauteurs; aux points A′, B′, C′, les milieux des côtés du triangle.

Cercles tritangents à une cubique. — Pour abréger, je dirai *tritangente* pour conique tritangente.

La condition pour qu'une tritangente (Γ) passe par un point donné I est que la droite Δ associée à cette tritangente reste tangente à la conique polaire de I relativement à (U_1).

En effet, la tritangente de Δ est la poloconique de Δ relativement à (U_1). Considérons deux tangentes (t) et

(t') à la tritangente (Γ); soient m et m' les pôles de ces droites relativement à (U_1) qui se trouvent sur Δ. Quand (t) et (t') viennent coïncider, il en est de même de m et m'. La conique polaire du point d'intersection de (t) et (t') contient m et m'. Donc la conique polaire d'un point I de (Γ) est tangente à la droite associée à (Γ) et le point de contact est un des pôles de la tangente en (I) à (Γ).

Par deux points donnés I et J passent quatre tritangentes. — Les droites associées à ces tritangentes sont les quatre tangentes communes aux coniques polaires de I et J relativement à (U_1).

Par mode de correspondance, il existe quatre cercles tritangents à une cubique.

Il suffit de prendre pour points I et J les points cycliques.

Le cercle d'Euler est tangent aux quatre cercles tritangents. — Les triangles ABC et A'B'C' envisagés plus haut étant inscrits à la conique (S) sont circonscrits à une même conique (Σ). Les droites Δ et Δ' sont également tangentes à (Σ).

Prenons pour Δ' la droite de l'infini et pour Δ une droite quelconque. Les coniques Σ sont des paraboles.

Le lieu des foyers de ces paraboles est le cercle circonscrit au triangle A'B'C', autrement dit le cercle d'Euler.

Considérons maintenant le cercle (s) circonscrit au triangle ABC (Δ quelconque). Il contient le foyer de la parabole (Σ).

Ce cercle coupe la cubique (U) en trois autres points A_1, B_1, C_1. Il existe une parabole (Σ_1) inscrite au triangle $A_1B_1C_1$. Les foyers des paraboles (Σ) et (Σ_1)

sont les deux intersections ψ et ψ_1 du cercle d'Euler et du cercle (s). Si (S) est un cercle tritangent à (U), les paraboles (Σ) et (Σ_1) se confondent; il en est de même de ψ et de ψ_1. Le théorème, extension de celui de Feuerbach, est donc démontré.

[$M^1 6 b \alpha$]

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CHASLES SUR LES ARCS ÉGAUX DE LEMNISCATE;

Par M. F. BALITRAND.

Chasles a appelé *arcs associés* sur une conique deux arcs dont la différence est rectifiable par la ligne droite. Quand la conique est une hyperbole équilatère, il a énoncé la proposition suivante (*C. R. Acad. Sc.*, des 23 octobre 1843 et 21 juillet 1845) : *A deux arcs associés sur une hyperbole équilatère correspondent, sur la lemniscate qui est sa podaire centrale, deux arcs égaux.*

Il n'a pas donné la démonstration de ce théorème, qui ne figure pas non plus dans le commentaire de De Jonquières (*Mélanges de Géométrie pure*, p. 55 à 113). Elle ne se trouve pas davantage, croyons-nous, dans les ouvrages classiques de MM. Gomes Teixeira et Gino Loria sur les courbes remarquables, aux chapitres consacrés à la lemniscate. La seule démonstration que nous connaissions est celle qui a été donnée par M. R. Bricard (*N. A.*, 1902, p. 150). Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'en donner une nouvelle.

basée sur des considérations de géométrie infinitésimale.

Soient M_1 et M_2 deux points d'une conique limitant un arc associé. Chasles a démontré que lorsque cet arc se déplace sur la courbe, les tangentes à ses extrémités se coupent en un point M qui décrit une conique homofocale à la conique donnée.

Désignons par s, ρ, ε, l'arc, le rayon de courbure et l'angle de contingence de (M) en M; par les mêmes lettres, affectées des indices 1 et 2, les éléments correspondants de la conique donnée en M_1 et M_2.

La normale en M à (M) est la bissectrice de l'angle M_1MM_2; elle coupe en I_1 et I_2 les normales en M_1 et M_2 à la conique donnée. Le point I_1 étant le centre instantané de rotation pour un déplacement infiniment petit du segment MM_1, on a

$$ds = MI_1\varepsilon_1, \qquad \frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho_1}{MI_1}.$$

De même

$$\frac{ds_2}{ds} = \frac{\rho_2}{MI_2};$$

et par suite

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{MI_2}{MI_1}.$$

Si l'on appelle 2θ l'angle M_1MM_2, puisque MI_1I_2 est la bissectrice de cet angle, on a

$$MM_1 = MI_1\cos\theta, \qquad MM_2 = MI_2\cos\theta;$$

donc

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{MM_2}{MM_1}.$$

Mais dans une conique les rayons de courbure en deux de ses points sont entre eux comme les cubes des portions de tangentes correspondantes, comprises entre leur point de concours et les points

de contact. Par suite,

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Cela posé, supposons que la conique donnée soit une hyperbole équilatère et considérons la lemniscate qui est sa podaire par rapport à son centre O. Soient μ_1 et μ_2 les points correspondant à M_1 et M_2; $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ les éléments d'arc de la lemniscate en ces points. D'après une formule connue, on a

$$d\sigma_1 = \frac{OM_1}{\rho_1} ds_1, \qquad d\sigma_2 = \frac{OM_2}{\rho_2} ds_2;$$

d'où

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_2} = \frac{OM_1}{OM_2} \times \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Mais dans l'hyperbole équilatère le rayon de courbure en un point est proportionnel au cube du rayon vecteur de ce point. Donc $d\sigma_1 = d\sigma_2$. C. Q. F. D.

[D3a]

SUR LES CONDITIONS POUR QU'UNE FONCTION $P(x, y) + iQ(x, y)$ SOIT MONOGÈNE;

PAR M. MAURICE FRÉCHET
(Strasbourg, Bas-Rhin).

1. Dans un précédent article publié ici-même [1], j'ai montré après W.-H. Young comment les énoncés

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. XII, 1912, p. 1-35.

de la théorie des fonctions de plusieurs variables se modèlent plus exactement sur ceux relatifs aux fonctions d'une variable, si l'on formule d'une certaine façon la définition de la différentielle totale.

Je faisais remarquer, en outre, que non seulement cette définition, qui semble due à Stolz, est ainsi, comme W.-H. Young semble le premier l'avoir montré, plus avantageuse, mais encore que si l'on se place au point de vue géométrique, cette définition *s'impose*.

Si, en effet, on dit qu'une fonction $z = f(x, y)$ a une différentielle totale en x_0, y_0, lorsque la surface $z = f(x, y)$ a un plan tangent non parallèle à Oz, au point x_0, y_0, $z_0 = f(x_0, y_0)$ et si, l'équation de ce plan étant

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

on appelle $p\,dx + q\,dy$ la différentielle de $f(x, y)$ en x_0, y_0, on voit, comme je l'ai prouvé dans cet article, que cette définition est équivalente à la suivante, qui est celle de Stolz à la forme près :

Une fonction $f(x, y)$ a une différentielle totale au point x_0, y_0, s'il existe une fonction linéaire des accroissements des variables $p\,\Delta x + q\,\Delta y$ qui ne diffère de l'accroissement de f que par une quantité infiniment petite par rapport à l'écart du point x_0, y_0, et du point voisin $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$. Autrement dit

$$\Delta f = p\,\Delta x + q\,\Delta y + \varepsilon(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

où ε tend vers zéro avec $|\Delta x| + |\Delta y|$. Il en résulte, en particulier en faisant Δx ou Δy nul, que f a une dérivée partielle par rapport à x, qui est p, et par rapport à y, qui est q.

II. Cette définition permet de formuler correcte-

ment et simplement les conditions auxquelles une fonction de la variable complexe $z = x + iy$ soit

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

est une fonction *monogène* de z.

On dit qu'une fonction $f(z)$, définie dans un domaine D, est monogène en un point x_0, y_0 de D si elle a une dérivée en ce point. Dans les Traités d'Analyse, on énonce comme la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, que l'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial x_0} = \frac{\partial Q}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y_0} = -\frac{\partial Q}{\partial x_0}.$$

Ceci suppose donc d'abord que P et Q ont des dérivées partielles par rapport à x et à y; et en fait, non seulement on le suppose, mais on suppose que ces dérivées partielles sont continues, sans d'ailleurs prouver que cette continuité est nécessaire.

III. A l'aide de la définition de la différentielle qui vient d'être rappelée, il n'y a aucune difficulté à préciser les conditions nécessaires et suffisantes.

Si, en effet, f est monogène en x_0, y_0, on a

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'_{z_0} = \omega,$$

ω étant une quantité qui tend vers zéro quand z tend vers z_0; ou encore (en posant $z = z_0 + \Delta x + i\Delta y$ et $f(z) - f(z_0) = \Delta P + i\Delta Q$)

$$\frac{\Delta P + i\Delta Q}{\Delta x + i\Delta y} - f'_{z_0} = \omega.$$

Si l'on pose $f'_{z_0} = p + iq$, $\omega = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$,

$$\begin{aligned}\Delta P + i\Delta Q - [(p\Delta x - q\Delta y) + i(p\Delta y + q\Delta x)]\\ = \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y + i(\varepsilon_1\Delta y + \varepsilon_2\Delta x),\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta P - (p\,\Delta x - q\,\Delta y) = \varepsilon_1\,\Delta x - \varepsilon_2\,\Delta y.$$
$$\Delta Q - (p\,\Delta y + q\,\Delta x) = \varepsilon_1\,\Delta y + \varepsilon_2\,\Delta x.$$

Or

$$|\varepsilon_1\,\Delta x - \varepsilon_2\,\Delta y| \leqq |\varepsilon_1|\,|\Delta x| + |\varepsilon_2|\,|\Delta y|$$
$$\leqq (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|)(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

On peut donc remplacer

$$\varepsilon_1\,\Delta x - \varepsilon_2\,\Delta y \quad \text{par} \quad \varepsilon(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

où ε tend vers zéro avec $|\Delta x| + |\Delta y|$. Par suite, P a une différentielle totale $p\,dx - q\,dy$ au point x_0, y_0. De même, Q a une différentielle $p\,dy + q\,dx$ en ce point. Alors

$$\frac{dP + i\,dQ}{dx + i\,dy} = \frac{(p\,dx - q\,dy) + i(p\,dy + q\,dx)}{dx + i\,dy}$$
$$= \frac{p\,dz + iq\,dz}{dz} = p + iq.$$

Finalement, si $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ *est monogène en* x_0, y_0 *:*

1° $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ *ont chacun une différentielle au sens de Stolz au point* x_0, y_0*;*

2° *Et le quotient de la différentielle de* f *par la différentielle de* z*, soit*

$$\frac{dP + i\,dQ}{dx + i\,dy}$$

est indépendant de dx *et de* dy. Le quotient sera d'ailleurs la dérivée f'_{z_0}.

La réciproque est vraie. Car alors on aura

$$\Delta P - dP = \varepsilon\,(|\Delta x| + |\Delta y|)$$
$$\Delta Q - dQ = \varepsilon'(|\Delta x| + |\Delta y|$$

ε, ε' tendant vers zéro avec Δz.

D'où

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta P - i\Delta Q}{\Delta x + i\Delta y}$$
$$= \frac{dP + i\,dQ}{dx + i\,dy} + (\varepsilon + i\varepsilon')\left(\frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\Delta x + i\Delta y}\right).$$

Le premier terme du dernier membre est, par hypothèse, une quantité $p + iq$ indépendante de $dx = \Delta x$ et de $dy = \Delta y$. Dans le dernier terme, $\varepsilon + i\varepsilon'$ tend vers zéro avec Δz et le module de

$$\frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\Delta x + i\Delta y}$$

est inférieur à $\sqrt{2}$. Donc $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ tend vers $p + iq$, quelle que soit la manière dont Δx et Δy tendent vers zéro.

IV. On remarque du reste que les conditions 1° et 2°, nécessaires et suffisantes pour que $f(z)$ soit monogène en x_0, y_0, peuvent s'exprimer ainsi :

a. $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ont des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y au point x_0, y_0 (cette condition est en général sous-entendue).

b. On a

$$\frac{\partial P}{\partial x_0} = \frac{\partial Q}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y_0} = -\frac{\partial Q}{\partial x_0}$$

(cette condition est en général la seule exprimée).

c. Les quantités

$$\Delta P - \left(\frac{\partial P}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial P}{\partial y_0}\Delta y\right), \qquad \Delta Q - \left(\frac{\partial Q}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y_0}\Delta y\right)$$

sont infiniment petites par rapport à $|\Delta x| + |\Delta y|$ (cette condition est généralement soit omise, soit remplacée par la condition inutilement restrictive de la continuité des dérivées premières de P et de Q).

[L¹ 11 a]

GROUPES DE POINTS SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE [1];

PAR M. J. SER.

Tout en gardant les notations de M. Appell, je supprimerai les indices pour les sommets A, B, C, D du premier quadrilatère Q en désignant par A_1, B_1, C_1, D_1 les sommets du quadrilatère Q_1 formé des orthocentres des quatre triangles de Q, et par A_n, B_n, C_n, D_n les sommets du quadrilatère Q_n obtenu en répétant n fois la même opération.

Je désignerai par x_n, y_n, les coordonnées d'un sommet de Q_n en mettant, s'il y a lieu, l'un des indices a_n, b_n, c_n, d_n, pour le sommet correspondant.

I. A. Définissons un point auxiliaire μ par ses coordonnées

$$(1) \qquad \xi = x_a x_b x_c x_d, \qquad \eta = y_a y_b y_c y_d.$$

En vertu de la relation rappelée par M. Appell,

$$(2) \qquad x_{a_1} x_b x_c x_d = -1,$$

nous avons l'égalité fondamentale

$$x_1 \xi = -x,$$

et par suite

$$\Pi x_1 \xi = \Pi(-x),$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 = \xi^{(-3)}$$

---

[1] Exercice proposé par M. P. Appell (*N. A.*, 1918, p. 41).

et d'une manière générale

$$(3) \qquad \xi_n = \xi^{(-3)^n}.$$

Étudions au moyen de ces formules la variation du point μ_n, et comme conséquence celle des points A_n, B_n, C_n, D_n. Il y a deux cas à distinguer.

1° Les sommets de Q situés sur une même branche de l'hyperbole sont en nombre pair, le quadrilatère Q est convexe.

ξ et η sont positifs et ξ_1 et η_1 le sont aussi ; les points μ_n sont donc sur la branche positive.

Si nous supposons à l'origine $\xi > 1$ le point μ est au-dessous de la bissectrice $x = y$; mais comme ξ_1 est alors < 1, le point μ_1 est au-dessus. Les points μ_n sont alors alternativement des deux côtés de la bissectrice ; ils s'éloignent de plus en plus à l'infini dans la direction de Ox pour les indices pairs, dans celle de Oy pour les indices impairs. Nous avons, en effet,

$$\lim \xi_{2n} = \infty, \qquad \lim \xi_{2n+1} = 0.$$

C'est l'inverse si $\xi < 1$.

Voyons comment se comporte un sommet A. Nous avons successivement

$$x_1 \xi = -x, \qquad x_2 \xi_1 = -x_1, \qquad \dots,$$
$$x_n \xi_{n-1} \xi_{n-2} \dots \xi = (-1)^n x,$$

et par suite

$$(4) \qquad x_n = (-1)^n x \xi^{-1+(-3)+\dots+(-3)^{n-1}} = (-1)^n x \xi^{\frac{(-3)^n-1}{4}}.$$

Donc x_n change de signe suivant la parité de n. Les sommets A_n vont d'une branche d'hyperbole à l'autre. En outre, au bout d'un certain nombre d'opérations, x_n est plus grand ou plus petit que 1, suivant le signe de l'exposant de ξ dans la formule (4). Par suite, il passe tantôt au-dessus tantôt au-dessous de la bissec-

trice en s'éloignant à l'infini dans la direction des asymptotes.

2° Si les points situés sur une même branche sont en nombre impair, un des sommets de Q étant alors intérieur au triangle formé par les trois autres, les résultats sont analogues, mais μ_n reste toujours sur la branche négative, et les sommets de même lettre A_n restent toujours sur la branche d'hyperbole où ils se trouvaient au début.

On peut étudier la variation du quadrilatère d'une autre manière. Les formules (4) peuvent s'écrire

$$(4\ bis)\quad \frac{x_{a_n}}{x_a} = \frac{x_{b_n}}{x_b} = \ldots = \lambda, \qquad \frac{y_{a_n}}{y_a} = \frac{y_{b_n}}{y_b} = \ldots = \mu.$$

Elles nous montrent immédiatement que l'on peut passer du quadrilatère Q au quadrilatère Q_n au moyen d'une projection cylindrique dont il est facile de déterminer les conditions.

Supposons d'abord λ et μ positifs. Comme $\lambda\mu = 1$, on peut considérer λ par exemple comme le cosinus d'un angle réel, φ. Par l'axe Ox du plan de Q faisons passer un plan P' faisant avec celui-ci l'angle φ et projetons le quadrilatère Q orthogonalement en Q'. Nous aurons pour les coordonnées d'un point de Q'

$$x' = \lambda x, \qquad y' = y.$$

Coupons maintenant le cylindre projetant Q' par un plan passant par Oy', projection de Oy sur P' et faisant avec P' le même angle φ. Soit $x_n\ y_n$ les coordonnées d'un point de P_n, nous aurons

$$x_n = x' = \lambda x, \qquad y_n = \frac{1}{\lambda} y' = \mu y.$$

L'ensemble de ces deux formules est bien équivalent aux formules (4 *bis*).

La construction est analogue, si c'est μ qui est < 1. Mais si λ est négatif, il y a une modification importante à faire. Après avoir construit le quadrilatère Q_n en partant de la valeur $-\lambda$ au lieu de λ, il faudra prendre le symétrique de celui-ci par rapport à l'origine pour avoir le quadrilatère répondant à la question.

Ce mode de construction nous donne des renseignements importants sur la continuité de la déformation du quadrilatère, mais il y a surtout lieu de signaler la propriété suivante :

La surface du quadrilatère Q ou celle d'un des triangles tel que A B C *reste constante, quel que soit n.*

Nous avons, en effet, entre les surfaces E, E' et E_n de trois éléments se correspondant dans les plans P, P' et P_n les relations

$$E' = \lambda E, \qquad E_n = \mu E' = E.$$

B. Pour qu'un sommet A_n puisse à un moment donné coïncider avec un sommet de même lettre A, il faudra que nous ayons

$$x_n = (-1)^n x \xi^{\frac{(-3)^n - 1}{4}} = x,$$

et dans ce cas tous les sommets du quadrilatère Q_n coïncideront avec les sommets de même lettre de Q.

En posant $\xi = e^S$, la condition devient

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{(-3)^n - 1}{4} S \equiv \pi i & \text{pour } n \text{ impair}, \\[2ex] \dfrac{(-3)^n - 1}{4} S \equiv 2\pi i & \text{pour } n \text{ pair}, \end{cases}$$

le signe $\equiv$ indiquant l'égalité à un multiple de $2\pi i$ près

Pour $n = 0$, on voit directement que $\xi = -1$, et la formule (1) montre alors que chacun des quatre sommets de Q est l'orthocentre des trois autres.

Ce cas exclus, à chaque valeur de n correspond un certain nombre de valeurs de S qui sont toutes des *imaginaires pures*. Les quadrilatères correspondants Q sont composés de points imaginaires non conjugués deux à deux. Toutefois, deux de ces points peuvent être réels, mais ils sont alors symétriques par rapport à la bissectrice.

C. D'autre part, rien ne s'oppose à ce qu'un sommet B_n d'un quadrilatère réel Q_n puisse coïncider avec un sommet de lettre différente A. Il suffit que les coordonnées initiales satisfassent à la condition

$$(6) \qquad x_{b_n} = x_a = (-1)^n x_b [x_a x_b x_c x_d]^{\frac{(-3)^n - 1}{4}}.$$

Pour qu'un second sommet C_n coïncide en même temps avec un autre sommet de Q, B par exemple, il faut une seconde condition, celle-là indépendante de n et facile à exprimer; on la déduit des formules

$$\frac{x_{a_n}}{x_a} = \frac{x_{b_n}}{x_b} = \ldots = \frac{x_a}{x_b} = \frac{x_b}{x_c}.$$

Et, en posant

$$x_a = e^{\alpha}, \qquad x_b = e^{\beta}, \qquad \ldots,$$

il vient

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma.$$

En particulier, pour que, B_n coïncidant avec A, A_n coïncide avec B, il faut $x_b^2 = x_a^2$. Les points A et B doivent être symétriques.

Il peut arriver enfin qu'un troisième sommet D_n puisse en outre coïncider avec C. Il y aura alors en plus

de la condition les égalités

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \delta.$$

Mais, pour qu'il y ait simultanément coïncidence des quatre sommets (les lettres correspondantes étant différentes), il faudrait les conditions

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \delta = \delta - \alpha,$$

dont on déduit immédiatement que la valeur commune à tous les termes devrait être $\frac{\pi i}{2}$; les quadrilatères correspondants ne seraient pas réels.

II. On peut se rendre compte des résultats qui précèdent par la transformation suivante, laquelle, si elle a l'inconvénient de faire correspondre des points imaginaires à des points réels, conduit à une conclusion extrêmement simple.

A tout point M (x, y) du plan P de l'hyperbole, faisons correspondre un point M' (x', y') d'un plan P' par les formules

$$(7)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x+y}{2} \\ y' = \dfrac{x-y}{2i} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= x' + iy', \\ y &= x' - iy'. \end{aligned}$$

A l'hyperbole correspond donc un cercle de rayon 1.

Remarquons maintenant que, si nous considérons trois points du plan de l'hyperbole, A, B, C, à la droite menée par A perpendiculairement à BC et qui a pour équation

$$(x - x_a)(x_b - x_c) + (y - y_a)(y_b - y_c) = 0,$$

correspond dans le plan du cercle, la droite

$$(8)\qquad (x' - x'_a)(x'_b - x'_c) - (y' - y'_a)(y'_b - y'_c) = 0.$$

Elle passe par A' et sa direction est perpendiculaire à la symétrique de B'C' par rapport à $O'x'$. Si la droite

$B'C'$ fait un angle u' avec $O'x'$, cette droite (8) fait avec cet axe un angle $\frac{\pi}{2} - u'$.

A l'orthocentre du triangle ABC correspond donc un point commun aux trois droites telles que (8). Si les trois points A' B' C' se trouvent sur le cercle, le point en question s'y trouve naturellement aussi, comme on le vérifierait d'ailleurs sans difficulté. Il en résulte que pour déterminer ce point il suffit dans ce cas, de prendre l'intersection du cercle avec une des droites (8).

Soit maintenant Q' le quadrilatère qui correspond au quadrilatère Q de l'hyperbole. Considérons les deux points B'_1 et A'_1 qui correspondent dans le plan P' aux orthocentres des triangles ACD et BCD. Nous les obtiendrons en menant par les points A' et B' respectivement des droites, *parallèles* entre elles puisqu'elles ont comme direction commune celle de la droite perpendiculaire à la symétrique de $C'D'$ par rapport à $O'x'$ et en prenant le second point d'intersection avec le cercle.

Nous remarquons immédiatement que la corde $A'_1 B'_1$ est égale à la corde $A'B'$; comme il en est de même des cinq autres cordes analogues, nous en déduisons ce résultat remarquable que le quadrilatère Q'_1 est *superposable* à Q. On l'obtient en faisant tourner ce dernier d'un angle θ que nous allons calculer.

Soit u' l'angle de $A'B'$ avec $O'x'$, v' celui de $C'D'$. L'angle θ est celui de la droite $A'_1 B'_1$ avec $A'B'$ égal à deux fois l'angle $A'_1 B' A'$. Nous avons donc

$$\text{angle de } A'B' \text{ avec } O'x' = u' + h\pi,$$
$$\text{angle de } A'_1 B' \text{ avec } O'x' = \frac{\pi}{2} - v' + k\pi,$$
$$\text{angle de } A'_1 B' \text{ avec } A'B' = \frac{\pi}{2} - (u' + v') + (k - l)\pi = \frac{\theta}{2},$$
$$\theta = \pi - 2(u' + v') \equiv \pi - S'.$$

Cet angle S′ est la somme, comme on le vérifierait facilement, des angles $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$ que font les droites O′A′, O′B′, O′C′, O′D′, avec $O'x'$. Il a aussi l'interprétation géométrique suivante : Si l'on considère les trois systèmes de droites passant par les quatre points A′, B′, C′, D′, ils ont leurs systèmes de bissectrices parallèles. Soit ω' l'angle que fait l'une d'elles avec $O'x'$, nous avons

$$S' = 2(u' + v') \equiv 4\omega',$$

le signe $\equiv$ indiquant l'égalité à un multiple de 2π près.

Si maintenant α'_1 désigne l'angle $A'_1 O' x'$, nous avons

$$\alpha'_1 = \alpha' + \theta$$

et par suite

$$\Sigma\alpha'_1 = S'_1 = \Sigma\alpha' + 4\theta = S' = S' + 4(\pi - S'),$$

ce qui nous conduit à la relation

$$S'_1 + 3S' = 0,$$

identique à la relation donnée par M. Appell à la page 42 (*loc. cit.*) et équivalente à la relation (3).

On en déduit

$$\alpha'_1 = \alpha' + \pi - S', \qquad \ldots \qquad \alpha'_n = \alpha'_{n-1} + \pi - S'_{n-1}$$

et finalement

$$\alpha_n = \alpha' + n\pi + S'\,\frac{(-3)^n - 1}{4}.$$

Pour que les points A'_n et A' coïncident, il faut que les angles correspondants ne diffèrent que de 2π, ce qui nous conduit à une formule identique à la formule (5).

Les raisons de ces équivalences sont évidentes ; les formules fondamentales (7) montrent, en effet, que

$$\alpha = i\alpha', \qquad \beta = i\beta', \qquad \ldots \qquad S = iS'.$$

On interprète donc immédiatement les conditions supplémentaires indépendantes de n trouvées pour que deux ou plusieurs sommets de lettre différente coïncident. Par exemple, l'égalité

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma \qquad \text{ou} \qquad \alpha' - \beta' = \beta' - \gamma'$$

signifie que les deux côtés AB et BC du quadrilatère Q sont égaux.

III. Je terminerai par une remarque : nous avons examiné la suite des quadrilatères Q_1 et Q'_1 déduits de Q et Q' ; on aurait pu se proposer le problème inverse et étudier les quadrilatères dont Q et Q' peuvent être considérés comme déduits.

Le problème se trouve résolu par les formules trouvées, puisqu'elles s'appliquent sans aucun doute aux valeurs négatives de n.

Il y a lieu, toutefois, de remarquer que, tandis qu'il n'y a qu'un seul quadrilatère Q_1 déduit de Q, il y a trois quadrilatères Q_{-1}. En outre, si Q est réel, un seul des quadrilatères Q_1 est réel, et c'est celui qui correspond à la racine réelle de ξ.

Quant aux quadrilatères Q'_{-1}, ils se construiront au moyen de la trisection de l'angle S' ; ils seront réels en même temps que Q'. Mais nous avons déjà fait remarquer qu'il n'y a pas correspondance entre les éléments réels des deux plans P et P'.

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *Sur la détermination de la normale à une courbe définie par une relation entre les*

distances tangentielles de ses points à n courbes données. — Le théorème énoncé récemment à cet effet dans les *Nouvelles Annales* (1919, p. 21) y a déjà été explicitement donné, il y a une trentaine d'années (1890, p. 291), et même à titre de corollaire d'une proposition beaucoup plus générale. La délicate question de signe que soulève l'application de ce théorème a été élucidée dans une note subséquente (*N. A.*, 1898, p. 115).

AVIS.

L'Université de Strasbourg, qui a été réouverte le 15 janvier de cette année, est en cours de réorganisation. A la rentrée prochaine, elle sera en plein fonctionnement (tous les cours se faisant en français).

Au point de vue mathématique, grâce à ses cinq professeurs et ses trois maîtres de conférences, ce sera le centre mathématique le plus important de France après Paris. L'Institut Mathématique y offrira un grand nombre de cours dont nous publierons prochainement le programme. La préparation à l'agrégation y sera organisée. Les candidats aux bourses de licence peuvent, dès à présent, choisir Strasbourg pour y faire leurs études.

Les étrangers trouveront aussi toutes facilités pour y compléter leur éducation mathématique ou y entreprendre des recherches.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

Numéros des questions des *Nouvelles Annales* (de **1842** à **1918**, nos 1 à 2383) pour lesquelles il n'a pas été reçu de solutions au **31** mai **1919** :

62 — 266 — 333 — 598 — 604 — 643 — 703 — 730 — 731 — 732 — 791 — 805 — 812 — 880 — 888 — 891 — 893 — 947 — 967 — 1000 — 1042 — 1058 — 1063 — 1107 — 1108 — 1149 — 1206 — 1234 — 1236 — 1256 — 1305 — 1365 — 1366 — 1490 — 1519 — 1571 — 1596 — 1599 — 1600 — 1609 — 1631 — 1647 — 1686 — 1687 — 1689 — 1690 — 1691 — 1692 — 1693 — 1694 — 1695 — 1705 — 1715 — 1731 — 1738 — 1747 — 1762 — 1763 — 1776 — 1777 — 1810 — 1824 — 1828 — 1854 — 1859 — 1884 — 1885 — 1886 — 1889 — 1890 — 1892 — 1911 — 1937 — 1944 — 1956 — 1988 — 2003 — 2010 — 2045 — 2057 — 2116 — 2141 — 2145 — 2156 — 2173 — 2182 — 2206 — 2210 — 2221 — 2232 — 2293 — 2326 — 2334 — 2340 — 2342 — 2343 — 2349 — 2350 — 2356 — 2362 — 2363 — 2372 — 2373 — 2378 — 2383.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

999.

(1870, p. 130; 1917, p. 159).

(L'énoncé de 1917 comporte une erreur de signe :

$$S_m = -(a^m + b^m)$$

et non $a^m + b^m$).

S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_m x^{n-m+1} + \ldots + A_n x + A_{n+1} = 0,$$

où l'on fait, pour abréger,

$$A_m = \frac{a^m - b^m}{a - b},$$

on a, depuis $m = 1$ *jusqu'à* $m = n$ *inclusivement,*

$$S_m = -(a^m + b^m).$$

On déduit de là que, a et b étant réels, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles.

S. Réalis.

SOLUTION

Par M. M. Faucheux.

On vérifie facilement la formule pour $m = 1$, et il suffit de démontrer que si la formule est vraie pour toute valeur de m jusqu'à $p < n$, elle est vraie pour $m = p + 1$. On sait que

$$\begin{aligned} A_1 S_{p+1} + A_1 S_p + A_3 S_{p-1} + \ldots \\ + A_k S_{p+2-k} + \ldots + A_{p+1} S_1 + (p-1) A_{p+2} = 0. \end{aligned}$$

Si la formule est vraie jusqu'à $m = p$,

$$S_{p+1} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (a^2 - b^2)(a^p + b^p) + (a^3 - b^3)(a^{p-1} + b^{p-1}) + \ldots \\ \quad + (a^{p+1} - b^{p+1})(a + b) - (p+1)(a^{p+2} - b^{p+2}) \end{array} \right\}}{a - b}$$

Si l'on développe le numérateur, chaque terme de la forme $a^\alpha b^\beta$ est écrit deux fois avec des signes différents, sauf ceux provenant de $(a^{p+1} - b^{p+1})(a + b)$: toutes réductions faites,

$$S_{p+1} = \frac{b^{p+2} - a^{p+2} - ab^{p+1} + ba^{p+1}}{a - b} = -(a^{p+1} + b^{p+1})$$

et la formule est établie.

Formons l'équation

$$f(x) = r_1 x^{n+2} + r_2 x^{n+1} + \ldots + r_{n+2} x + r_{n+3} = 0$$

ayant pour racines a, b et les racines de la proposée. Si l'on

désigne par σ_m les sommes analogues à S_m.

$$r_1\sigma_1 + r_2 = 0,$$
$$r_1\sigma_2 + r_2\sigma_1 + 2r_3 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$r_1\sigma_n + r_2\sigma_{n-1} + r_3\sigma_{n-2} + \dots + r_n\sigma + nr_{n+1} = 0,$$

et comme

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = 0,$$

on a immédiatement

$$r_2 = r_3 = \dots = r_{n+1} = 0$$

et

$$f(x) \equiv r_1x^{n+2} + r_{n+1}x + r_{n+3}.$$

$f'(x) = 0$ est une équation binome; si n est pair, elle a une racine réelle; $f(x) = 0$ a deux racines réelles a, b : la proposée n'a pas de racine réelle.

Si n est impair, $f'(x) = 0$ a deux racines réelles: $f(x) = 0$ en a trois, dont a et b; la proposée en a seulement une.

1074.

(1872, p. 190; 1917, p. 228.)

Étant donné un polygone plan et convexe dont deux côtés consécutifs quelconques font un angle constant, on sait que le lieu du point, tel qu'en projetant ce point sur les côtés du polygone et joignant les projections consécutives par des droites on forme un polygone d'une aire donnée, est une circonférence. Quand la valeur de l'aire varie, on obtient diverses circonférences qui ont toutes même centre O. Démontrer que ce point O est le centre des moyennes distances des sommets du polygone primitif, ou plus généralement des points qu'on obtient en prenant les centres des deux côtés séparés par un même nombre k de côtés. Ce point O est aussi le centre des moyennes distances de ses projections sur les côtés du polygone.

Voir ce que deviennent ces théorèmes quand ces côtés deviennent infiniment petits et que le polygone se transforme en une courbe plane et convexe. On retrouvera en particulier une proposition bien connue de Steiner rela-

tive au centre de gravité de masses appliquées aux différents arcs infiniment petits égaux de la courbe et inversement proportionnelles aux rayons de courbure correspondants. F. Didon.

SOLUTION

Par M. J. Ser.

I. Désignons par φ_h une des m valeurs $\frac{2h\pi}{m}$, où h varie de o à $m-1$. Soit D_2 le côté du polygone qui a pour équation cartésienne

$$(1) \qquad x\cos\varphi_h + y\sin\varphi_h - p_h = 0.$$

Pour simplifier les calculs, posons

$$(2) \quad x+iy=z, \qquad x-iy=t, \qquad e^{-i\varphi_h}, \qquad e^{i\varphi_h}=\mu_h.$$

Remarquons que les λ et les μ sont des racines différentes d'une même équation $\lambda^m=1$ et qu'ils sont liés par la relation

$$\lambda_h\mu_h=1$$

qui entraîne

$$\lambda_h\mu_{h+k}=\mu_k, \qquad \lambda_{h+k}\mu_h=\lambda_k.$$

L'équation (1) devient, après transformation,

$$\lambda_h z+\mu_h t-2y_h=0.$$

A. La surface du triangle joignant un point $M(zt)$ à ses projections I_h et I_{h+1} sur deux côtés consécutifs du polygone a pour valeur

$$S_h^{h+1}=\frac{1}{8}\sin\frac{2R}{m}(\lambda_h z+\mu_h t-2p_h)(\lambda_{h+1}z+\mu_{h+1}t-2p_{h+1}).$$

Le lieu des points M. tels que la somme de ces surfaces ait une valeur constante donnée A, a donc pour équation

$$\Sigma_{h=0}^{h=m-1}, \quad S_h^{h+1}=A.$$

Développons-la en remarquant que

$$\Sigma\lambda_h\lambda_{h+1} = \Sigma\lambda_{2h+1} = 0, \qquad \Sigma\mu_h\mu_{h+1} = 0,$$

$$\Sigma\lambda_h\mu_{h+1} + \lambda_{h+1}\mu_h = m(\lambda+\mu) = 2m\cos\frac{2\pi}{m},$$

$$\Sigma\lambda_h p_{h+1} + \lambda_{h+1}p_k = \Sigma p_h(\lambda_{h+1}+\lambda_{h-1})$$

$$= (\lambda+\mu)\Sigma p_h\lambda_h = 2\cos\frac{2\pi}{m}\Sigma p_h\lambda_h,$$

$$\Sigma\mu_h p_{h+1} + \mu_{h+1}p_h = 2\cos\frac{2\pi}{m}\Sigma p_h\mu_h,$$

et en posant

$$2\Sigma p_h\mu_h = m z_0, \qquad 2\Sigma p_h\lambda_h = m t_0,$$

$$\sin\frac{2\pi}{m}\Sigma p_k p_{h+1} = 2B,$$

nous obtenons pour le lieu cherché l'équation

$$m\sin\frac{4\pi}{m}(zt - t_0 z - z_0 t) = 8(A - B).$$

C'est bien l'équation d'un cercle ayant pour centre le point fixe $z_0 t_0$.

B. Le point M_h^{h+k} d'intersection de deux côtés D_h, D_{h+k} a pour coordonnées ζ_h

$$\zeta_h = 2\frac{p_h\mu_{h+k} - p_{h+k}\mu_h}{\lambda_h\mu_{k+k} - \mu_h\lambda_{h+k}} = 2\frac{p_h\mu_{h+k} - p_{h+k}\mu_h}{\mu_k - \lambda_k},$$

et le centre des moyennes distances de tous ces points est bien le point $O(z_0 t_0)$, puisque

$$\Sigma\zeta_h = 2\sum\frac{p_h(\mu_{h+k} - \mu_{p-k})}{m(\mu_k - \lambda_k)} = 2\sum\frac{p_h\mu_h}{m} = z_0.$$

Lorsque $k = 1$, les points M_h^{h+1} sont les sommets du polygone donné.

Pour les autres valeurs de k, les points M_h^{h+k} sont les sommets de divers polygones; l'angle des droites D_h, D_{h+k} est constant quel que soit h, et égal à $\frac{2k\pi}{m}$.

C. Soit P l'origine des coordonnées; le pied P_h de la per-

pendiculaire abaissée de P sur le côté D_h a pour coordonnées

$$\xi_k = \frac{p_h}{\lambda_h} = p_h \mu_k, \qquad \eta_k = \frac{p_h}{\mu_h} = p_h \lambda_h.$$

Le centre des moyennes distances de ces points est donc

$$\zeta_0 = \sum \frac{p_h \mu_h}{m} = \frac{z_0}{2}, \qquad \eta_0 = \sum \frac{\mu_h \lambda_h}{m} = \frac{t_0}{2}.$$

Ce centre des moyennes distances est donc au milieu de la droite OP et il coïncide avec O lorsque O et P sont confondus.

II. Si le nombre des côtés du polygone grandit indéfiniment, la limite $\frac{2\pi}{m} = \Delta\varphi$ représente l'accroissement constant infiniment petit de l'angle des normales à la courbe C lieu des sommets du polygone donné, c'est-à-dire des points M_h^{h+1}.

Le polygone limite des points M_h^{h+k} et une courbe *isoptique* de la courbe C, de chacun des points de laquelle on voit la courbe C sous l'angle $\alpha = \lim \frac{2k\pi}{m}$.

Le lieu des points P_h relatifs au point O est la podaire de la courbe C par rapport au point O.

Nous arrivons donc aux conclusions suivantes :

A. Le lieu des points M tels que la podaire de M par rapport à une courbe donnée C ait une aire égale à A est un cercle Le centre de ce cercle est un point O ayant pour coordonnées cartésiennes

$$x_0 = \frac{z_0 + t_0}{2} = \lim \sum \frac{p_h(\lambda_h + \mu_h)}{m} = \frac{1}{\pi} \int p \cos\varphi \, d\varphi$$

(p et φ désignant les coordonnées polaires de la projection de l'origine sur une tangente à la courbe C),

$$y_0 = \frac{1}{\pi} \int p \sin\varphi \, d.$$

Le rayon a pour carré $\frac{2}{\pi}(A - B)$.

La valeur minimum B que peut prendre A pour que le cercle soit réel est l'aire de la podaire relative au point O.

B. Le point O est le centre des moyennes distances des sommets de trois sortes de polygones dont les sommets sont définis comme correspondant à des valeurs égales de $\Delta\varphi$: 1° sur la courbe C; 2° sur une isoptique de cette courbe C; 3° sur la podaire de la courbe C par rapport au point O.

Soient, dans l'un de ces trois cas, $x'y'$ les coordonnées de l'un des trois sommets : en prenant le point O pour origine, nous aurons les relations

$$O = \lim \sum \frac{x'}{m} = \int x' \Delta\varphi, \qquad O = \int y' \Delta\varphi.$$

Soit maintenant $\Delta s'$ le côté du polygone adjacent au point $x'y'$, et soit ρ' la fonction de φ qui représente le rapport $\frac{\Delta s'}{\Delta\varphi}$; on peut écrire

$$\int x' \Delta\varphi = \int \frac{x' \Delta s'}{\rho'} = 0, \qquad \int y' \Delta\varphi = \int \frac{y' \Delta s'}{\rho} = 0,$$

et à la limite

$$\int \frac{x'\, ds'}{\rho'} = 0, \qquad \int \frac{y'\, ds'}{\rho'} = 0,$$

d'après la propriété bien connue de l'indépendance de la valeur de l'intégrale par rapport à la loi de division.

Le point O est donc le centre de gravité « de masses appliquées aux différents arcs infiniment petits égaux inscrits, soit dans la courbe, soit dans une de ses isoptiques, soit dans sa podaire, et inversement proportionnelles aux différentes valeurs de ρ' ».

Sur la courbe C, ρ' est égal au rayon de courbure.

Autres solutions, par MM. Faucheux et H. de Montille.

1486 et 1511.

(1884, p. 160, 496; 1916, p. 394.)

1486. *La probabilité que la conique déterminée par cinq points, pris au hasard dans un plan, soit une ellipse, est infiniment petite.*

1511. *On donne au hasard, dans un plan, quatre points, et l'on en prend un comme centre d'une conique passant par les trois autres. Démontrer que cette conique est, avec autant de probabilité, une ellipse ou une hyperbole.*

CESÀRO.

SOLUTION

Par M. A. PELLET.

Dans la première question, la probabilité est la même que celle d'avoir une valeur négative pour la fonction $y^2 - 4z$, y et z prenant toutes les valeurs possibles, car l'équation de la conique dans le cas où elle peut être une ellipse, s'écrit

$$X^2 + yXY + zY^2 - \ldots = 0,$$

y et z pouvant être absolument quelconques (X, Y coordonnées courantes).

Supposons d'abord y et z inférieurs en valeur absolue au nombre positif R, alors la probabilité est égale au rapport de l'aire comprise dans l'intérieur de la parabole $y^2 - 4z = 0$ (région du foyer) et du cercle $z^2 + y^2 = R^2$, à celle du cercle; ce rapport est inférieur à

$$\frac{3R\sqrt{R}}{\pi R^2} = \frac{3}{\pi\sqrt{R}};$$

il tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini.

Dans la seconde question, l'équation de la conique peut s'écrire

$$AX^2 + BY^2 - 1 = 0,$$

l'une des quantités A ou B étant positive; si la seconde est positive, on a une ellipse; si elle est négative, une hyperbole; mais on voit qu'à tout système de valeurs de A, B donnant une ellipse correspond un système donnant une hyperbole, et *vice versa*.

Autre solution, de 1486, par *Un Anonyme*.

Pour la question 1511, voir une solution précédente, 1918, p. 71, et une observation de M. EGAN, p. 199 (Correspondance).

2365.

(1918, p. 160.)

Dans un triangle ABC *la transversale réciproque, par rapport au triangle, de la droite des centres des cercles d'Apollonius, est perpendiculaire à la droite d'Euler.*

THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. L. POLI.

On sait que les centres des cercles d'Apollonius sont sur la droite de Lemoine (*cf.*, par exemple, *Exercices de Mécanique*, par F. G. M., p. 707).

La transversale réciproque de la droite de Lemoine est la droite de Longchamps (*Ibid.*, p. 617).

Enfin, cette dernière est perpendiculaire à la droite d'Euler (*cf.*, par exemple, *Ibid.*, p. 692, où l'on démontre que la droite de Longchamps est axe radical du cercle de Longchamps et du cercle circonscrit; or, ces deux derniers cercles ont leurs centres sur la droite d'Euler).

QUESTIONS.

2411. Une horloge porte une aiguille des heures, une aiguille des minutes et une aiguille des secondes, montées sur le même pivot. Ces trois aiguilles ne peuvent être en coïncidence qu'à midi, comme on le reconnaît facilement. A quelle heure, non infiniment voisine de midi, sont-elles contenues dans un angle aussi petit que possible ? R. B.

2412. On donne dans un plan deux coniques (S) et (Σ), et un point O ; soit A un point commun aux deux coniques. On mène par O une sécante variable qui rencontre la conique (S) en P et P', et l'on trace les droites AP, AP' qui rencontrent encore la conique (Σ) aux points Π et Π'; la droite ΠΠ' passe alors par un point fixe Ω, et le lieu du point de rencontre des droites PP' et ΠΠ' est la conique qui passe par les points O, Ω, et par les trois autres points B, C, D communs aux deux coniques.

A quelles conditions les droites PΠ′ et P′Π passent-elles en B, auquel cas on obtient la même figure complète en se servant du point B qu'en se servant du point A ? Remarquer le quadrilatère complet dont les trois diagonales sont AB, PP′, ΠΠ′.

Cas de deux cercles. G. F.

2413. Une droite Δ du plan d'un triangle ABC rencontre les rayons OA, OB, OC du cercle circonscrit en α, β, γ. Les parallèles menées à BC, CA, AB respectivement par ces points déterminent un triangle A′B′C′. Si abc est le triangle podaire, par rapport à ABC, d'un point P quelconque de Δ, les droites A′a, B′b, C′c rencontrent respectivement B′C′, C′A′, A′B′ en trois points en ligne droite. V. Thébault.

2414. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy, on considère les paraboles Π et Π′ admettant pour foyer commun le point F de Oy et qui sont tangentes à Ox en des points A et B tels que l'angle AFB soit droit. On voit (1) que, dans ces conditions, les secondes tangentes t et t' que, de tout point de Ox, on peut mener à Π et Π′, sont rectangulaires. Trouver l'équation de l'enveloppe de la droite qui est la symétrique de Ox à la fois par rapport à t et à t', et construire cette courbe.

M. d'Ocagne.

2415. Dans un quadrilatère complet ABCDEF, où la distance des milieux des diagonales BE et DF égale leur demi-somme, chacun des côtés contient un des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle formé par les trois diagonales. V. Thébault.

2416. Si par les sommets A, B, C d'un triangle on mène des parallèles $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ aux côtés B′C′, C′A′, A′B′ d'un autre triangle A′B′C′ et que par A′, B′, C′ on mène des parallèles $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\gamma'$ à BC, CA, AB, les aires des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ déterminés satisfont à la relation

$$(\text{aire ABC}) \times (\text{aire } \alpha'\beta'\gamma') = (\text{aire A'B'C'}) \times (\text{aire } \alpha\beta\gamma).$$

V. Thébault.

(1) *N. A.*, 1901, p. 446.

2417. Dans un polygone harmonique $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$ inscrit dans une circonférence O, on trace les circonférences ω_1, ω_2, ..., ω_{2n} tangentes deux à deux et touchant le cercle O aux sommets du polygone. Montrer que le polygone $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{2n}$ est circonscrit à un cercle dont le centre est sur la droite OK du centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du polygone. V. Thébault.

2418. On sait que le lieu des pôles d'une droite l, par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel, est une droite l'. Démontrer que les couples de droites l, l', qui sont perpendiculaires entre elles, enveloppent une courbe de la troisième classe.

En particulier, dans le cas des paraboles inscrites à un triangle, cette enveloppe est une hypocycloïde à trois rebroussements. M.-F. Egan.

ERRATA.

Page 82, dernière ligne, *au lieu de* vers la génératrice, *lire* sur la génératrice.

Page 87, ligne 17, *au lieu de* milieu de i, *lire* milieu i.

Page 88, dernière ligne, la parenthèse doit s'ouvrir non avant

Page 88, ligne 9 en remontant, *au lieu de* T, *lire* Γ.

« nous pourrions », mais avant « section que ».

Au 2° de la question 2400, p. 120, où la signature V. Thébault a été omise, *il faut lire* « par rapport à I » *au lieu de* « par rapport à OI ».

Page 153, milieu de la page, dans l'expression de $\frac{1}{2}\int_0^\omega \rho^2\, d\omega$, dans le second terme de la grande parenthèse, on ne doit pas lire

$$ln \times \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right), \qquad \text{mais} \qquad ln\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right);$$

le signe ln du logarithme népérien portant sur la fonction $\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)$, au lieu de la multiplier comme l'indiquerait le signe $\times$.

[O₁2]

SUR QUELQUES COURBES ASSOCIÉES A UNE CLASSE D'HÉLICES CYLINDRIQUES.

Par M. EGAN.

I. — Courbes de Duporcq. [1]

1 Les courbes (planes) de Duporcq sont caractérisées par la propriété suivante : si le point m décrit la courbe avec la vitesse constante c, le pied n sur Ox de la normale parcourt Ox avec la vitesse également constante ec. On peut évidemment supposer la constante e positive.

Considérons le vecteur $O\mu$, issu de l'origine et congruent à nm. La vitesse du point μ se compose de c perpendiculaire à $O\mu$ et de $-ec$ parallèle à Ox. C'est précisément le mouvement newtonien : *μ décrit une conique d'excentricité e suivant la loi des aires autour du foyer O de la conique.*

L'axe focal de la conique est Oy. Supposons, pour fixer les idées, que le sommet μ_0, le plus proche de O, se trouve au-dessus de O, et que le vecteur $O\mu$ tourne dans le sens positif autour de O. Soient l le paramètre de la conique et $h = r^2 d\theta : dt$ la constante des aires, r et θ étant les coordonnées polaires de μ; les composantes de la vitesse de μ sont $h : l$ perpendiculaire à $O\mu$, dans le sens positif de la rotation de $O\mu$, et $-he : l$

(1) Duporcq, *N.A.*, 1902, p. 181; Mannheim, *Ibid.*, p. 337 et 481; Balitrand, *Ibid.*, 1914, p. 97.

dans la direction Ox. On a alors la génération suivante des courbes de Duporcq :

Si l'on donne au système newtonien (O, μ) *la vitesse uniforme he : l suivant l'axe non focal de l'orbite, le point m (position absolue de* μ) *décrira une courbe de Duprocq avec la vitesse constante h : l.*

Remarquons une première conséquence de cette génération. Si s est l'arc de la courbe de Duporcq, on a $ds = hdt : l$, d'où l'expression du rayon de courbure, $R = ds : d\theta = r^2 : l$, trouvée par Duporcq.

2. On dispose encore de la position de l'origine O sur la droite fixe Ox. Fixons-la de façon que les points correspondants μ_0 et m_0 se confondent; alors Oy sera la normale en ce point aux deux courbes (μ) et (m). Soient ξ, η les coordonnées cartésiennes du point μ se mouvant sur la conique fixe (μ), et x, y celles de m. On peut écrire dès maintenant les équations des courbes de Duporcq répondant aux trois espèces de coniques (μ). En effet, si m passe par m_0 au temps $t = 0$, on a

$$x - \xi = eht : l, \qquad y = \eta, \qquad s = ht : l,$$
$$ht = \int r^2 d\theta = \int \xi \, d\eta - \eta \, d\xi.$$

a. Pour $e < 1$, écrivons

$$l = b^2 : a = a(1 - e^2),$$
$$\xi = -b \sin u, \qquad \eta = -ae + a \cos u,$$

u s'annulant et croissant avec t. On trouve sans peine

$$(1a) \quad \begin{cases} s = \dfrac{a^2}{b}(u - e \sin u), \qquad x = \dfrac{a^2}{b}(eu - \sin u), \\ y = a(-e + \cos u). \end{cases}$$

b. Pour $e > 1$, posons

$$l = b^2 : a = a(e^2 - 1),$$
$$\xi = -b\,\mathrm{sh}\,u, \qquad \eta = ae - a\,\mathrm{ch}\,u;$$

il vient

$$(1b)\quad \begin{cases} s = \dfrac{a^2}{b}(e\,\mathrm{sh}\,u - u), \qquad x = \dfrac{a^2}{b}(\mathrm{sh}\,u - eu), \\ y = a(e - \mathrm{ch}\,u). \end{cases}$$

Si μ décrit la branche supérieure de l'hyperbole (μ), on peut écrire

$$\xi = -b\,\mathrm{sh}\,u, \qquad \eta = ae + a\,\mathrm{ch}\,u,$$

d'où

$$(1b')\quad \begin{cases} s = \dfrac{a^2}{b}(e\,\mathrm{sh}\,u + u), \qquad x = \dfrac{a^2}{b}(\mathrm{sh}\,u + eu), \\ y = a(e + \mathrm{ch}\,u). \end{cases}$$

c. Pour $e = 1$, écrivons

$$l = 6c, \qquad \xi = -6cu, \qquad \eta = 3c(1 - u^2),$$

on trouve

$$(1c)\quad \begin{cases} s = c(u^3 + 3u), \qquad x = c(u^3 - 3u), \\ y = 3c(1 - u^2). \end{cases}$$

Dans toutes ces formules, u s'annule en m_0 et croît avec θ. Les courbes sont symétriques autour de l'axe des y. Sur cet axe, ($1a$) a un seul point double (donné par $u = e \sin u$) si e n'est pas trop petit. Cette courbe est périodique et le point double se répète sur les droites $x = 2m\pi\ a^2 e : b$. Le point O est entouré d'une boucle. Si e est assez petit, les boucles autour des points congruents de O s'entrecroisent. Les courbes ($1b$) et ($1c$) ont chacune un seul point double réel, situé sur Oy, ($1b'$) n'en a aucun.

3. On trouve une seconde génération des trois pre-

mières courbes en prenant u proportionnel au temps. Si par exemple un point λ décrit l'ellipse

$$x = -\frac{a^2}{b}\sin u, \qquad y = -ae + a\cos u$$

suivant la loi des aires autour du centre de l'ellipse, tandis que le système se déplace suivant Ox avec la vitesse constante $he : a$, λ décrira la courbe (1 a).

II. — Une classe d'hélices cylindriques.

4. C'est à propos d'un article de M. H. Piccioli (N. A., 1902 p. 177), sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe Δ, que Duporcq a été amené à considérer les courbes précédentes.

Soient en effet M un point de l'hélice, N le pied sur Δ de la normale principale en M, α et β les angles constants que font Δ et la tangente à l'hélice avec la direction (verticale) des génératrices du cylindre. La droite MN étant horizontale, les vitesses de M et de N ont même composante verticale, soit V; leurs composantes horizontales sont donc $V\operatorname{tang}\beta$ et $V\operatorname{tang}\alpha$, et l'on voit que la projection m de M sur un plan de section droite du cylindre décrit une courbe de Duporcq avec $e = \operatorname{tang}\alpha\cot\beta$. On aura donc les équations de ces hélices en posant $s = z\operatorname{tang}\beta + \text{const.}$ dans les quatre formules (1 a)-(1 c) ci-dessus.

Prenons l'origine O sur Δ et menons comme auparavant le segment $O\mu$ parallèle et égal à MN et nm; μ décrit la conique newtonienne autour de O, et l'on voit que *si l'on donne au système planétaire* (O, μ) *une vitesse uniforme* $he : l\sin\alpha$ *dans la direction* Δ ($\sin\alpha$, 0, $\cos\alpha$), μ *décrira l'hélice cylindrique d'angle* β *avec la vitesse constante* $h : l\sin\beta$, α *et* β *étant liés*

par la relation $\cot\beta = e\cot\alpha$. *Les normales principales de l'hélice rencontrent la droite* Δ.

5. Voici une propriété intéressante de ces hélices : *les tangentes de l'hélice appartiennent à un complexe linéaire dont l'axe est parallèle à* Δ.

En effet, l'hélice est une ligne asymptotique du conoïde Σ engendré par ses normales principales; la proposition n'est donc qu'un cas particulier du théorème connu sur les asymptotiques d'un conoïde. Inversement, si une hélice appartient par ses tangentes à un complexe linéaire, les normales principales sont des droites du complexe; comme ces normales sont parallèles à un même plan, elles rencontrent un diamètre Δ du complexe. C'est pourquoi nos formules s'accordent avec celles données par M. Keraval pour les hélices d'un complexe linéaire (¹).

6. On connaît trois asymptotiques de Σ, savoir l'hélice, la droite Δ, et la droite à l'infini dans un plan (xy) de section droite. Si donc NM rencontre une asymptotique donnée en M', le théorème de Serret montre que le rapport anharmonique $(M'MN\infty)$ est constant, c'est-à-dire que $NM' = k\,NM$. Projetons sur le plan des xy par des droites parallèles à Δ; les projections des asymptotiques de Σ seront des coniques homothétiques à (μ) par rapport au foyer O.

Supposons que le système newtonien (O, μ) se déplace suivant Δ avec une vitesse uniforme *arbitraire;* on voit, d'après ce qui précède, que la trajectoire de μ

(¹) *N. A.*, 1909, p. 42. M. Keraval prend l'axe du complexe comme axe des z, et il fait remarquer que l'hélice se projette sur le plan des xy suivant une conique.

dans l'espace sera homothétique à l'une des asymptotiques de Σ.

7. Si une hélice appartient à un complexe dont l'axe (soit Ox) est perpendiculaire à l'axe hélical Oz, la droite Δ est à l'infini et les normales principales font partie d'une congruence singulière. La section droite du cylindre n'est plus une courbe de Duporcq. Soit dans ce cas

$$C = y\,dz - z\,dy - a\,dx = 0$$

l'équation du complexe. L'arc s de la section droite du cylindre étant proportionnel à z, on déduit de cette équation que

$$y\,ds - s\,dy = b\,dx,$$

c'est-à-dire que

$$y - s\sin\Phi = b\cos\Phi,$$

Φ étant l'angle entre Ox et la tangente à la section. Une différentiation donne

$$-s\cos\Phi = -b\sin\Phi;$$

la section du cylindre est donc une chaînette, et l'hélice est donnée par

$$x = bu, \qquad y = b\,\mathrm{ch}\,u, \qquad z = a\,\mathrm{sh}\,u.$$

Prenons, sur la normale principale de l'hélice au point M, un point M′ tel que la projection de MM′ sur Oy ait une valeur fixe c, d'ailleurs quelconque. On vérifie sans peine que la courbe (M′) appartient au complexe $C + 2c\,dz = 0$, cette courbe est donc une asymptotique de la surface Σ engendrée par les normales principales.

III. — Courbes (r) de Mannheim.

8. Mannheim a étudié (*loc. cit.*) les courbes, appelées par lui courbes (r), qui engendrent une courbe de

Duporcq en roulant sur une droite fixe. Si le point m est le pôle d'une courbe (r) roulant sur Ox, le point de contact n de (r) avec Ox est en même temps le pied de la normale à la courbe (m) et le centre instantané du mouvement. Désignons par p la distance perpendiculaire (égale à $\pm y$) du pôle m à la tangente On, et par Φ l'angle que fait cette tangente avec une droite invariablement liée à la courbe mobile (r). On a

$$d(m) = nm\, d\Phi,$$

d'où

$$d\Phi = \frac{d(m)}{nm} = \frac{dx}{y}.$$

On trouve ainsi, pour les quatre courbes (1 a) — (1 c)

$$u = -\Phi\sqrt{1-e^2}, \qquad u = \mp\Phi\sqrt{e^2-1} \qquad u = -\Phi.$$

Comme on a $p = \pm y$, il s'ensuit que *les courbes (r) les plus générales sont données par les formules*

(2 a) $\quad p = a\cos\left(\Phi\sqrt{1-e^2}\right) - ae \qquad (e < 1),$

(2 b) $\quad p = a\,\text{ch}\left(\Phi\sqrt{e^2-1}\right) \pm ae \qquad (e > 1).$

(2 c) $\quad p - a(1-\varphi^2) \qquad (e = 1).$

La courbe (2 a) est la parallèle à distance ae à l épicycloïde donnée par

$$p = a\cos\left(\Phi\sqrt{1-e^2}\right).$$

(Celle-ci bien est une épicycloïde et non une hypocycloïde, puisque $1 - e^2 < 1$).

La courbe (2 b) est la parallèle à distance $\pm ae$ à l'hypercycloïde [1] donnée par

$$p = a\,\text{ch}\left(\Phi\sqrt{e^2-1}\right).$$

---

[1] *Voir* par exemple WIELEITNER, *Spezielle Ebene Kurven*, 1908, p. 211-219. On y trouvera une figure de l'hypercycloïde répondant à $e = \sqrt{2}$ (p. 216).

M. Balitrand a reconnu (*loc. cit.*) le caractère cycloïdal des développées des courbes (r).

Quant à ($2c$), considérons un cercle de centre C et sa développante Γ ayant son rebroussement au point A de la circonférence. L'équation ($2c$) représente la développante de Γ ayant son point de courbure maxima au milieu de CA.

9. Deux courbes (r) nous ont échappé. En effet, l'équation de la conique (μ) peut s'écrire $r = l - ey$. Si l'on pose $y = -p$, on a l'équation $r = ep + l$, ($r = mn$), qui caractérise les courbes (r). Or, si $e \geqq 1$, l peut être nul; on a alors une spirale logarithmique ou un cercle, suivant le cas. La roulette est une droite, courbe de Duporcq dégénérée.

10. Une dernière remarque. Si une épicycloïde ou une hypercycloïde (E) roule sur une droite d avec une vitesse angulaire constante, le pôle décrit une conique centrale suivant la loi des aires autour du centre de la conique. Donnons au système une vitesse de translation constante suivant d; le nouveau mouvement équivaut au roulement d'une courbe parallèle à (E) sur une droite parallèle à d. On retrouve ainsi la seconde génération de la courbe de Duporcq associée à une conique centrale (I. 3).

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1915.
SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE;

Par M. de SPARRE.

Un tabouret est porté par trois pieds identiques AA′, BB′, CC′, également inclinés sur la verticale et

terminés par des surfaces très petites qu'on assimilera à des points A, B, C. Le tabouret est homogène et symétrique par rapport aux trois plans qui passent chacun par l'axe $O_1O'_1$ du tabouret et par l'un des trois pieds A, B, C. A l'instant initial, ce tabouret est en équilibre, ses trois pieds reposant en A, B, C sur le sol horizontal supposé assez uni pour qu'on puisse négliger le frottement.

Problème. — 1° En un point T du montant AA' situé dans le plan vertical de symétrie $O_1O'A$, on exerce une force F. A quelles conditions devra satisfaire F pour que l'équilibre primitif subsiste?

2° Au lieu de la force F, on applique une percussion $\mathfrak{P}$ au même point T. Déterminer la distribution des vitesses dans le tabouret à l'instant qui suit immédiatement la percussion. On portera son attention sur la discussion des résultats suivant la direction, la grandeur de la percussion $\mathfrak{P}$ et la position de son point d'application T. On pourra se borner aux trois cas suivants :

I. Le point T est dans le plan horizontal du centre de gravité G du tabouret;

II. La percussion $\mathfrak{P}$ est parallèle à BC;

III. La percussion $\mathfrak{P}$ est dans le plan vertical $O_1O'_1A$.

3° On appliquera les résultats précédents aux cas où la ligne d'action de $\mathfrak{P}$:

I. Passe par le point O_1, la percussion étant ascendante;

II. Passe par le symétrique de O_1 par rapport à A, la percussion étant descendante, le point T étant à distance égale du sol et du plan horizontal du centre de

gravité G et sa projection T_1 sur AO_1 divisant AO_1 dans le rapport

$$\frac{T_1 A}{O_1 T_1} = \frac{1}{3};$$

III. Est parallèle à AO_1 et de même sens, le point T étant au-dessous du plan horizontal du centre de gravité G.

4° Dans ce dernier cas (3°, III) on étudiera le mouvement du tabouret après la percussion, on calculera la réaction et l'on discutera les résultats obtenus suivant les valeurs de la percussion.

Notations. — Le triangle ABC est équilatéral.

On appellera H le milieu de BC, O_1 le centre du triangle, G le centre de gravité du tabouret situé sur l'axe $O_1 O'_1$. On posera

$$BC = 2a, \qquad O_1 A = 2b\,(a = b\sqrt{3}), \qquad h = O_1 G,$$

$$\rho = AG\,(\rho = \sqrt{h^2 + 4b^2}), \qquad \psi = \widehat{O_1 AG} \qquad (h = 2b\,\text{tang}\,\psi).$$

On appellera M la masse du tabouret; I, J, K ses moments d'inertie par rapport à trois axes passant par G et parallèles respectivement à O_1A, BC, $O_1 O'_1$.

On prendra pour axes fixes trois axes rectangulaires coïncidant à l'instant initial avec $O_1 A$, la parallèle à CB menée par O_1 et $O_1 O'_1$.

On définira la distribution des vitesses dans le tabouret par les projections ξ, η, ζ; p, q, r de la vitesse de G et de la vitesse angulaire instantanée de rotation sur des axes mobiles liés au corps et coïncidant avec $O_1 x$, $O_1 y$ et $O_1 z$ à l'instant initial.

On appellera (α, o, γ) les coordonnées initiales du point T.

SOLUTION PAR M. DE SPARRE.

Équilibre. — Nous désignons par N_1, N_2 et N_3 les réactions en A, B, C; elles sont verticales, puisqu'il n'y a pas de frottement, et comptées positivement dans le sens O_1Z.

Le tabouret étant seulement posé, il faudra, pour l'équilibre, que ces forces soient positives ou nulles.

D'abord, puisqu'il n'y a pas de frottement, il faut que F soit verticale, et, si on la suppose comptée positivement dans le sens O_1Z, on devra avoir

$$N_1 + N_2 + N_3 - Mg + F = 0.$$

L'équation des moments par rapport à O_1x donnera ensuite $N_2 = N_3$; puis celle des moments par rapport à O_1y,

$$(N_2 + N_3)b - 2N_1 b - \alpha F = 0,$$

d'où l'on déduit

$$N_1 = \frac{1}{3}\left[Mg - F\left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)\right],$$

$$N_2 = N_3 = \frac{1}{3}\left[Mg - F\left(1 - \frac{\alpha}{2b}\right)\right].$$

La condition d'équilibre est donc que F soit verticale et $N_1 > 0$, ce qui entraîne, puisque $\alpha \leqq 2b$, $N_2 > 0$.

Les conditions d'équilibre sont donc : F verticale et

$$F < \frac{Mg}{1 + \frac{\alpha}{b}}.$$

Cas d'une percussion agissant en T. — Nous remarquerons d'abord que, du moment que l'on suppose le tabouret symétrique par rapport aux trois plans qui passent chacun par $O_1O'_1$ et l'un des trois points A, B, C, l'ellipsoïde d'inertie pour le centre de

gravité est de révolution autour de $O_1 O'_1$, puisque les moments d'inertie par rapport à ces trois plans, et par suite aussi par rapport aux diamètres qui s'y trouvent, sont égaux. On a donc, avec les notations de l'énoncé,

$$I = J.$$

Soient alors X', Y', Z' les composantes parallèles aux axes de la percussion qui agit en T; N'_1, N'_2, N'_3 les percussions de réaction, verticales puisqu'il n'y a pas de frottement, qui agissent en A, B, C. Ces percussions doivent être positives ou nulles.

On aura, par suite, six cas à examiner :

N'_1, N'_2, N'_3 sont tous trois positifs;

$N'_1 = 0$ avec N'_2 et N'_3 positifs;

$N'_2 = 0$ avec N'_1 et N'_3 positifs (le cas de $N'_3 = 0$ avec N'_1 et N'_2 positifs se déduisant du précédent par le changement de a en $-a$);

$N'_2 = N'_3 = 0$ et N'_1 positif;

$N'_2 = N'_1 = 0$ avec N'_3 positif (le cas de $N'_3 = N'_1 = 0$ avec N'_2 positif se déduisant du précédent par le changement de a en $-a$);

Enfin, $N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0$.

Nous considérons comme axes mobiles liés au corps, non pas, comme il est dit dans l'énoncé, des axes qui coïncident avec $O_1 x_1$, $O_1 y_1$, $O_1 z_1$, mais les axes menés par le centre de gravité G et parallèles respectivement à $O_1 A$, à CB, le troisième étant $G O'_1$ (axes par rapport auxquels les moments d'inertie sont I, I et K).

On remarquera d'abord qu'il y a trois équations qui restent les mêmes dans les différents cas que l'on a à considérer : ce sont celles des quantités de mouvements en projection sur Gx', Gy', et celle de leurs moments par rapport à Gz, dans lesquelles les réac-

tions N'_1, N'_2, N'_3, qui sont verticales, n'interviennent pas. On a ainsi

$$X' - M\xi = 0, \qquad Y' - M\eta = 0, \qquad Y'\alpha - Kr = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad \xi = \frac{X'}{M}, \qquad \eta = \frac{Y'}{M}, \qquad r = \frac{\alpha Y'}{K},$$

équations qui s'appliquent dans tous les cas et donnent les valeurs de ξ, η et r.

Supposons maintenant N'_1, N'_2 et N'_3, tous trois différents de zéro.

Nous aurons, par l'équation des quantités de mouvement en projection sur Gz :

$$(2) \qquad N'_1 + N'_2 + N'_3 + Z' - M\zeta = 0 ;$$

puis, par celles des moments par rapport à Gx' et Gy',

$$(3) \qquad Y'(h - \gamma) + N'_2 a - N'_3 a - Ip = 0,$$

$$(4) \qquad -X'(h - \gamma) - Z'\alpha - 2bN'_1 + bN'_2 + bN'_3 - Iq = 0.$$

Puisque nous supposons que les trois points A, B et C restent au contact, nous aurons

$$\zeta - 2qb = 0, \qquad \zeta + pa + qb = 0, \qquad \zeta - pa + qb = 0,$$

d'où l'on déduit $\zeta = p = q = 0$, ce qui était évident *a priori*.

Les équations (2), (3) et (4) donnent alors

$$(5) \qquad N'_1 = -\left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)\frac{Z'}{3} - \frac{h - \gamma}{3b}X',$$

$$(6) \qquad N'_2 = \frac{Z'}{6}\left(\frac{\alpha}{b} - 2\right) + \frac{X'(h - \gamma)}{6b} - \frac{Y'(h - \gamma)}{2a},$$

$$(7) \qquad N'_3 = \frac{Z'}{6}\left(\frac{\alpha}{b} - 2\right) + \frac{X'(h - \gamma)}{6b} + \frac{Y'(h - \gamma)}{2a},$$

et il faudra que les valeurs de N'_1, N'_2 et N'_3 soient toutes trois positives.

Si l'une de ces quantités était négative, il faudrait la supposer nulle et l'on passerait à l'un des cas suivants.

Supposons maintenant

$$N'_1 = 0, \quad N'_2 > 0 \quad \text{et} \quad N'_3 > 0.$$

On a alors, d'abord, pour exprimer que les vitesses de B et C sont nulles :

$$\zeta + pa + qb = 0, \qquad \zeta - pa + qb = 0,$$

d'où l'on déduit

$$p = 0, \qquad \zeta = -qb.$$

Les équations (2), (3) et (4), où N'_1 est nul, donnent alors

$$N'_2 + N'_3 + Z' - M\zeta = 0,$$

$$N'_2 - N'_3 + Y'\frac{h-\gamma}{a} = 0,$$

$$N'_2 + N'_3 - X'\frac{h-\gamma}{b} - Z'\frac{\alpha}{b} + \frac{\zeta I}{b^2} = 0.$$

On en déduit

$$(8) \qquad \zeta = \frac{b^2}{Mb^2 + I}\left[X'\frac{h-\gamma}{b} + Z'\left(1 + \frac{\alpha}{b}\right)\right] = -qb,$$

$$(9) \qquad N'_2 = X'\frac{(h-\gamma)Mb}{2(I+Mb^2)} - Y'\frac{h-\gamma}{2a} + \frac{Z'}{2}\,\frac{M\alpha b - I}{I+Mb^2},$$

$$(10) \qquad N'_3 = X'\frac{(h-\gamma)Mb}{2(I+Mb^2)} + Y'\frac{h-\gamma}{2a} + \frac{Z'}{2}\,\frac{M\alpha b - I}{I+Mb^2},$$

et ici encore il faudra vérifier que N'_2 et N'_3 sont tous deux positifs; si l'une de ces quantités était négative, il faudrait la supposer nulle et l'on passerait à l'un des cas suivants.

Supposons maintenant

$$N'_2 = 0, \qquad N'_1 > 0, \qquad N'_3 > 0.$$

On a d'abord, pour exprimer que les vitesses de A et de C sont nulles,

$$\zeta - 2qb = 0, \qquad \zeta - pa + qb = 0,$$

d'où

$$q = \frac{\zeta}{2b}, \qquad p = \frac{3\zeta}{2a}.$$

Les équations (2), (3) et (4), où N'_2 est nul, donnent alors

$$N'_1 + N'_3 + Z' - M\zeta = 0,$$

$$N'_3 + \frac{3}{2}\frac{I\zeta}{a^2} - \frac{Y'(h-\gamma)}{a} = 0,$$

$$N'_3 - 2N'_1 - \frac{Z'\alpha}{b} - \frac{X'(h-\gamma)}{b} - \frac{I\zeta}{2b^2} = 0;$$

d'où

$$(11) \qquad \zeta = \frac{2a^2b^2}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2} \times \left[Z'\left(2-\frac{\alpha}{b}\right) - \frac{X'(h-\gamma)}{b} + 3\frac{Y'(h-\gamma)}{a}\right],$$

$$(12) \qquad N'_3 = \frac{Y'(h-\gamma)a(I+4Mb^2) - 3bI[Z'(2b-\alpha) - X'(h-\gamma)]}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2},$$

$$(13) \qquad N'_1 = \frac{\left\{\begin{array}{l} Y'(h-\gamma)a(2Mb^2-I) - Z'\alpha b(3I+2Ma^2) \\ \quad - Z'I(a^2+3b^2) - X'(h-\gamma)b(3I+2Ma^2 \end{array}\right\}}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2},$$

Le cas de $N'_3 = 0$, $N'_1 > 0$, $N'_2 > 0$ se déduit alors du précédent en changeant a en $-a$.

Supposons maintenant

$$N'_2 = N'_3 = 0, \qquad N'_1 > 0.$$

Les équations (2), (3) et (4), où $N'_2 = N'_3 = 0$, donnent

$$N'_1 + Z' - M\zeta = 0,$$

$$Y'(h-\gamma) - Ip = 0,$$

$$-X'(h-\gamma) - Z'\alpha - 2bN'_1 - Iq = 0.$$

Puis, en exprimant que la vitesse de A est nulle, on a

$$\zeta - 2qb = 0.$$

On en déduit

$$(14) \qquad p = \frac{Y'(h-\gamma)}{I},$$

$$(15) \qquad q = \frac{\zeta}{2b} = \frac{(2b-\alpha)Z' - X'(h-\gamma)}{I + 4Mb^2}.$$

$$(16) \qquad N'_1 = -\frac{Z'(2b\alpha M + I) + 2bMX'(h-\gamma)}{I + 4Mb^2}.$$

Supposons maintenant

$$N'_2 = N'_1 = 0, \qquad N'_1 > 0.$$

Les équations (2), (3) et (4) nous donnent

$$N'_3 + Z' - M\zeta = 0,$$
$$Y'(h-\gamma) - N'_3 a - Ip = 0,$$
$$X'(h-\gamma) + Z'\alpha - bN'_3 + Iq = 0.$$

Puis ensuite, en exprimant que la vitesse de C est nulle, on aura

$$\zeta' - pa + qb = 0$$

On en déduit

$$(17) \quad N'_3 = \frac{Mb(h-\gamma)X' + Ma(h-\gamma)Y' - Z'(I - M\alpha b)}{I + M(a^2+b^2)},$$

$$(18) \quad \zeta = \frac{b(h-\gamma)X' + a(h-\gamma)Y' + (a^2+b^2+\alpha b)Z'}{I + M(a^2+b^2)},$$

$$(19) \quad Ip = \frac{(h-\gamma)(I+Mb^2)Y' - Mab(h-\gamma)X' + Z'a(I - Mab)}{I + M(a^2+b^2)},$$

$$(20) \quad Iq = \frac{\left\{ \begin{array}{l} Mab(h-\gamma)Y' - Z'[I(\alpha+b) + M\alpha a^2] \\ \qquad - X'(h-\gamma)(I + Ma^2) \end{array} \right\}}{I + M(a^2+b^2)}.$$

Le cas de $N'_3 = N'_1 = 0$, $N'_2 > 0$ se déduit du précédent en changeant a en $-a$.

Si enfin $N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0$, on retombe dans le cas d'un corps libre et l'on a

$$Z' - M\zeta = 0, \qquad Y'(h-\gamma) - Ip = 0,$$
$$X'(h-\gamma) + Z'\alpha + Iq = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(21)\quad \zeta = \frac{Z'}{M}, \quad p = \frac{Y'(h-\gamma)}{I}, \quad q = -\frac{X'(h-\gamma)+\zeta'\alpha}{I}.$$

Examinons maintenant les cas particuliers indiqués dans l'énoncé.

I. Le point T est dans le plan horizontal du centre de gravité.

Donc $h = \gamma$.

Dans ce cas, pour que l'on ait

$$N'_1 > 0, \qquad N'_2 > 0, \qquad N'_3 > 0,$$

il faut que

$$Z' < 0 \quad \text{et} \quad \alpha < 2b.$$

Cette dernière condition est d'ailleurs toujours remplie, puisque

$$2b = O_1A = O_1T_1 = \alpha.$$

Donc si $Z' < 0$, les trois points A, B et C restent en contact avec le plan, et l'on a

$$\zeta = p = q = 0, \qquad \zeta = \frac{X'}{M}, \qquad \eta = \frac{Y'}{M}, \qquad r = \frac{\alpha Y'}{K}.$$

Si $Z' > 0$, on ne peut avoir

$$N'_1 > 0, \qquad N'_2 > 0, \qquad N'_3 > 0;$$

mais si $I < M\alpha b$, les formules (9) et (10) donnent, pour N'_2 et N'_3, des valeurs positives, et l'on a

$$\zeta = \frac{bZ'(b+\alpha)}{I+Mb^2}, \qquad q = -\frac{Z'(b+\alpha)}{I+Mb^2}, \qquad p = 0,$$

$$N'_2 = N'_3 = \frac{M\alpha b - I}{I+Mb^2}\,\frac{Z'}{2}.$$

Donc les points B et C restent en contact avec le plan, et le point A se soulève. On a d'ailleurs pour la vitesse

de A

$$\zeta - 2qb = \frac{3bZ'(b+\alpha)}{I + Mb^2},$$

et l'on vérifie que cette vitesse est positive.

Si $Z' > 0$, $I > M\alpha b$, comme d'ailleurs $\alpha < 2b$, on doit supposer

$$N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0,$$

et l'on déduira des formules (41)

$$p = 0, \qquad q = -\frac{Z'\alpha}{I}, \qquad \zeta = \frac{Z'}{M}.$$

On aura d'ailleurs pour la vitesse de A

$$\zeta - 2qb = \frac{Z'}{M} + \frac{2Z'\alpha b}{I} = \frac{Z'(I + 2M\alpha b)}{IM},$$

et, pour celles de B et C,

$$\zeta + qb = \frac{Z'}{M} - \frac{Z'\alpha b}{I} = Z'\frac{I - M\alpha b}{IM},$$

et comme $I > M\alpha b$, ces trois vitesses sont bien positives.

II. La percussion est parallèle à BC.

On a donc, si P est cette percussion, comptée positivement dans le sens BC,

$$X' = Z' = 0, \qquad Y' = -P.$$

On ne peut, dans ce cas, avoir

$$N'_1 > 0, \qquad N'_2 > 0, \qquad N'_3 > 0,$$

à cause des équations (6) et (7). De même, à cause des équations (9) et (10), on ne peut non plus avoir

$$N'_1 = 0 \quad \text{avec} \quad N'_2 > 0, \quad N'_3 > 0.$$

Supposons $N'_2 = 0$, $N'_1 > 0$ et $N'_3 > 0$; on aura, par les formules (12) et (13),

$$N'_3 = -\frac{P(h-\gamma)a(I+4Mb^2)}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2},$$

$$N'_1 = -\frac{P(h-\gamma)a(2Mb^2-I)}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2},$$

Donc si $P > 0$, les valeurs de N'_3 et de N'_1 sont positives si $h < \gamma$ et $I < 2Mb^2$.

On a d'ailleurs, dans ce cas,

$$\zeta = -\frac{6ab^2P(h-\gamma)}{I(a^2+9b^2)+4Ma^2b^2}, \quad p = \frac{3\zeta}{2a}, \quad bq = \frac{\zeta}{2b},$$

et la vitesse de B, égale à

$$\zeta + pa + qb = 3\zeta,$$

est positive.

Le cas de $h > \gamma$ et $P < 0$ donne le même résultat et celui de $P(h-\gamma) > 0$ se déduit du précédent en changeant le signe de a, c'est-à-dire en remplaçant B par C et réciproquement, donc N'_3 par N'_2.

Si l'on a

$$I > 2Mb^2,$$

N'_3 et N'_1 sont de signes contraires ; ils ne peuvent donc être tous deux positifs (et en changeant le signe de a, on voit qu'il en est de même de N'_2 et N'_1).

Supposons par suite $N'_1 = N'_2 = 0$; on aura, par la formule (17),

$$N'_3 = -\frac{MPa(h-\gamma)}{I+M(a^2+b^2)},$$

valeur qui sera positive si $P(h-\gamma) < 0$. Le cas de $P(h-\gamma) > 0$ se déduit de celui-là par le changement du signe de a, donc en remplaçant B par C.

Dans ce cas, on a, en vertu des formules (18), (19)

et (20), pour les vitesses de A et B,

$$\zeta - 2qb = -\frac{a(h-\gamma)P(I - 2Mb^2)}{I[I + M(a^2+b^2)]},$$

$$\zeta + pa + qb = -\frac{2a(h-\gamma)P(I + Mb^2)}{I[I + M(a^2+b^2)]},$$

quantités positives si, comme nous le supposons,

$$(h-\gamma)P < 0 \qquad \text{et} \qquad I > 2Mb^2.$$

En résumé, dans ce cas, en supposant $P > 0$ (le cas de $P < 0$ se déduisant de celui-là par le remplacement de B par C) :

Si $I < 2Mb^2$, les points A et C restent au contact du plan si $h < \gamma$; donc, si le point T est au-dessus du plan du centre de gravité. Au lieu de cela, si $h > \gamma$, donc si le point T est au-dessous du centre de gravité, ce seront les points A et B qui resteront en contact.

Si $I > 2Mb^2$, un seul point resté en contact, ce sera le point C si $\gamma > h$, et, au lieu de cela, le point B si $h > \gamma$.

III. La percussion est dans le plan de symétrie vertical $O_1O'A$. On a alors

$$Y' = 0 \qquad \text{et} \qquad N'_2 = N'_3.$$

Si l'on suppose d'abord

$$N'_2 = N'_3 > 0 \qquad \text{et} \qquad N'_1 > 0,$$

il faudra que l'on ait, d'après les formules (5), (6) et (7),

$$N'_1 = -\left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)\frac{Z'}{3} - \frac{h-\gamma}{3b}X',$$

$$N'_3 = N'_2 = \frac{Z'}{6}\left(\frac{\alpha}{b} - 2\right) + X'\frac{h-\gamma}{6b},$$

d'où

$$N'_1 + N'_2 + N'_3 = -Z';$$

et l'on conclut qu'il faudrait $Z' < 0$, et, puisque $\alpha < 2b$,

$$Z'(2b - \alpha) < X'(h - \gamma) < -Z'(b + \alpha).$$

Si l'on suppose ensuite

$$N'_2 = N'_3 > 0, \qquad N'_1 = 0,$$

on aura, en vertu de (9) et (10),

$$N'_2 = N'_3 = X' \frac{(h - \gamma) M b}{2(I + M b^2)} + \frac{Z'}{2} \frac{M \alpha b - I}{I + M b^2},$$

et il faudra que l'on ait

$$M b X'(h - \gamma) + Z'(M \alpha b - I) > 0.$$

Si cette condition n'est pas remplie, on aura

$$N'_2 = N'_3 = 0, \quad N'_1 > 0 \qquad \text{ou} \qquad N'_2 = N'_3 = N'_1 = 0.$$

Si l'on a $N'_2 = N'_3 = 0$, $N'_1 > 0$, on aura, par la formule (16),

$$N'_1 = -\frac{Z'(2 M \alpha b + I) + 2 M b X'(h - \gamma)}{I + 4 M b^2},$$

et, pour que le mouvement se produise dans ces conditions, il faudra

$$-Z'(2 M \alpha b + I) - 2 M b X'(h - \gamma) > 0.$$

Si cette inégalité, en même temps que les précédentes, n'est pas remplie, on aura alors

$$N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0$$

et les équations (21) donneront

$$\zeta = \frac{Z'}{M}, \qquad p = 0, \qquad q = -\frac{X'(h - \gamma) + Z' \alpha}{I},$$

et l'on en conclut, pour la vitesse de A,

$$\zeta - 2qb = \frac{(Z'(I + 2 M \alpha b) + 2 M X'(h - \gamma)}{I M} > 0,$$

et, pour les vitesses des points B et C,

$$\xi + qb = \frac{Z'(I - M\alpha b) - MbX'(h - \gamma)}{IM} > 0,$$

en vertu des hypothèses faites.

Appliquons les résultats précédents aux cas où la ligne d'action de P :

(I) Passe par le point O_1, la percussion étant ascendante.

On a alors

$$X' = \frac{P\alpha}{l}, \qquad Y' = 0, \qquad Z' = \frac{P\gamma}{l}, \qquad P > 0,$$

avec $l^2 = \alpha^2 + \gamma^2$.

D'après ce qui précède, dans le cas de

$$N'_1 = 0, \qquad N'_2 = N'_3 > 0,$$

la condition

$$MbX'(h - \gamma) + Z'(M\alpha b - I) > 0$$

devient

$$\frac{P}{l}(M\alpha bh - \gamma I) > 0 \qquad \text{ou} \qquad I < \frac{M\alpha bh}{\gamma}.$$

Si cette condition est remplie, on a

$$N'_2 = N'_3 = \frac{P}{l}\,\frac{M\alpha bh - \gamma I}{2(I + Mb^2)} > 0;$$

les points B et C restent en contact avec le plan, et l'on a par la formule (8)

$$p = 0, \qquad \zeta = -qb = \frac{Pb}{l}\,\frac{\alpha h + b\gamma}{I + Mb^2}.$$

Si $I > \frac{M\alpha bh}{\gamma}$, on a

$$N' = N'_2 = N'_3 = 0 \quad (^1),$$

et les trois points quittent le plan.

---

(1) On ne peut en effet avoir, puisque $X' > 0$ et $Z' > 0$,

$$N'_2 = N'_3 = 0, \qquad N'_1 > 0.$$

D'ailleurs,

$$\zeta = \frac{Z'}{M} = \frac{P\gamma}{Ml}, \quad p = 0, \quad q = -\frac{X'(h-\gamma)+Z'\alpha}{I} = -\frac{hP\alpha}{Il}.$$

Par suite, la vitesse de A est

$$\zeta - 2qb = \frac{P(\gamma I + 2Mb\alpha h)}{MIl},$$

et celle de B et C

$$\zeta + qb = \frac{P(\gamma I - Mb\alpha h)}{MIl} > 0.$$

(II) Passe par le symétrique de O_1, par rapport à A, la percussion étant descendante, le point T étant à distance égale du sol et du plan horizontal du centre de gravité, et sa projection T sur OA_1 divisant OA_1 dans le rapport $\frac{T_1A}{O_1T_1} = \frac{1}{3}$.

On conclut de là

$$\frac{O_1T_1}{O_1A} = \frac{3}{4};$$

donc

$$O_1T_1 = \alpha = \frac{3}{2}b,$$

de plus

$$\gamma = \frac{h}{2}, \quad X' = P\frac{\alpha}{l}, \quad Y' = 0, \quad Z' = -\frac{P\gamma}{l},$$

où toujours $l^2 = \alpha^2 + \gamma^2$.

Donc, en remplaçant α et γ par leurs valeurs,

$$X' = \frac{3b}{2l}P, \quad Z' = -\frac{h}{2l}P, \quad l^2 = \frac{9b^2 + h^2}{4}.$$

Si l'on suppose d'abord que les trois points restent en contact avec le plan, les formules (5), (6) et (7) donneront

$$N'_1 = N'_2 = N'_3 = \frac{Ph}{6l};$$

donc, dans ce cas, les trois points restent en contact avec le plan.

(III) Est parallèle à AO_1 et de même sens, le point T étant au-dessous du plan horizontal du centre de gravité G.

On a donc

$$Y' = Z' = 0, \qquad \gamma < h, \qquad X' < 0.$$

Dans ce cas, les trois points ne peuvent rester en contact avec le plan, puisque les équations (5), (6) et (7) donnent dans le cas actuel

$$N'_1 + N'_2 + N'_3 = 0;$$

on ne peut non plus avoir

$$N'_1 = 0, \qquad N'_2 = N'_3 > 0,$$

car les équations (9) et (10) donnent

$$N'_2 = N'_3 = \frac{X'(h-\gamma)Mb}{2(I + Mb^2)} < 0, \qquad \text{puisque} \qquad X' = -P.$$

On doit donc supposer

$$N'_2 = N'_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad N'_1 > 0.$$

La formule (16) donnera alors, puisque $X' = -P$,

$$N'_1 = \frac{2bMP(h-\gamma)}{I + 4b^2M} > 0.$$

Les formules (14) et (15) donnent d'ailleurs

$$p = 0, \qquad q = \frac{\zeta}{2b} = \frac{P(h-\gamma)}{I + 4Mb^2}.$$

On a, de plus,

$$\zeta = \frac{X'}{M} = -\frac{P}{M}, \qquad \eta = 0, \qquad r = 0.$$

Dans ce dernier cas (3°, III), pour le mouvement du tabouret après la percussion, le mouvement du centre de gravité se fait forcément dans le plan des xz, et le mouvement autour du centre de gravité est une rotation autour de l'axe principal perpendiculaire à ce plan passant par G.

Si x et z sont les coordonnées de G, on aura, pour la force vive $2T$ du système,

$$2T = M(x'^2 + z'^2) + Iq^2,$$

et, pour la fonction des forces,

$$U = -Mgz.$$

D'ailleurs, si le point A reste en contact avec le plan, on a

$$q = \psi', \qquad z = \rho \sin\psi, \qquad z' = \rho \cos\psi\, \psi';$$

d'où

$$q^2 = \psi'^2 = \frac{z'^2}{\rho^2 - z^2},$$

et par suite

$$2T = \left[M + \frac{I}{\rho^2 - z^2}\right] z'^2 + M x'^2.$$

L'équation de Lagrange en x donne d'abord

$$x' = \text{const.},$$

ce que fournit aussi l'équation du mouvement du centre de gravité, et par suite, en tenant compte des conditions initiales,

$$x' = -\frac{P}{M}.$$

L'équation des forces vives donne ensuite, en tenant compte des conditions initiales,

$$\frac{I + M(\rho^2 - z^2)}{\rho^2 - z^2} z'^2 = \zeta^2 \frac{I + 4Mb^2}{4b^2} - 2Mg(z - h),$$

ou, en remplaçant ζ^2 par sa valeur,

$$\frac{I + M(\rho^2 z^2)}{\rho^2 - z^2} z'^2 = \frac{P^2(h-\gamma)^2}{I + 4Mb^2} - 2Mg(z-h).$$

Mais, pour que le mouvement se produise dans ces conditions, il faut que la réaction N_1 du plan soit positive; or l'équation du mouvement du centre de gravité, en projection sur Oz, donne

$$Mz'' = N_1 - Mg;$$

d'où

$$N_1 = M(g + z'').$$

Mais on déduit de la valeur de z'^2

$$z''\left[M + \frac{I}{\rho^2 - z^2}\right] + \frac{Izz'^2}{(\rho^2 - z^2)} = -Mg,$$

d'où

$$[I + M(\rho^2 - z^2)](g + z'') = gI - \frac{Izz'^2}{\rho^2 - z^2}.$$

Mais, en remplaçant z'^2 par sa valeur, nous pourrons écrire, en tenant compte de ce que $\rho^2 = h^2 + 4b^2$,

$$\frac{I + M(\rho^2 - z^2)}{M} N_1 = \frac{Iz}{I + M(\rho^2 - z^2)} \left\{ g\frac{I + M[(z-h)^2 + 4b^2]}{z} - \frac{P^2(h-\gamma)^2}{I + 4Mb^2} \right\}.$$

Pour que le mouvement se produise dans les conditions indiquées, il faut d'abord que N_1 soit positif à l'instant initial pour $z = h$; il faut donc que l'on ait

$$\sqrt{\frac{g}{h}} > \frac{P(h-\gamma)}{I + 4Mb^2}.$$

Donc

1° Si

$$\frac{P(h-\gamma)}{I + 4Mb^2} > \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \text{ou} \quad \frac{P^2(h-\gamma)^2}{I + 4Mb^2} > \frac{g}{h}(I + 4Mb^2),$$

N_1 sera nul dès le début et le point A quittant le plan, comme les points B et C, le mouvement du corps est celui d'un solide libre, les composantes de la vitesse initiale du centre de gravité étant

$$\xi = -\frac{P}{M}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 2\frac{P(h-\gamma)b}{I+4Mb^2},$$

et le solide tournant autour de l'axe principal perpendiculaire au plan xO_1z avec la vitesse angulaire

$$q = \frac{P(h-\gamma)}{I+4Mb^2}.$$

Si, au lieu de cela,

$$\frac{P(h-\gamma)}{I+4Mb^2} < \sqrt{\frac{g}{h}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{P^2(h-\gamma)^2}{I+4Mb^2} < g\frac{I+4Mb^2}{h},$$

N_1 est positif au début du mouvement, et le point A reste en contact avec le plan à l'instant initial.

D'ailleurs, si $z_1 < z < \rho$, on a

$$\frac{I+M[z_1-h)^2+4b^2]}{z_1} - \frac{I+M[(z-h)^2+4b^2]}{z}$$
$$= (z-z_1)\frac{I+M(\rho^2-zz_1)}{z\,z_1} > 0;$$

donc l'expression

$$\frac{I+M[(z-h)^2+4b^2]}{z}$$

décroît constamment lorsque z croît de h à ρ.

La valeur maxima que puisse prendre z, tant que A reste en contact avec le plan, est ρ, et, comme, pour $z=\rho$, on a

$$\frac{I+M[(z-h)^2+4b^2]}{z} = \frac{I}{\rho} + 2M(\rho-h);$$

il en résulte que :

2° Si

$$g\left[\frac{1}{\rho}+2\mathrm{M}(\rho-h)\right]<\frac{\mathrm{P}^2(h-\gamma)^2}{1+4\mathrm{M}b^2}<\frac{g}{h}(1+4\mathrm{M}b^2),$$

le point A restera en contact avec le plan lorsque z croît de h à la racine z_1 de l'équation

$$g\{1+\mathrm{M}[(z-h)^2+4b^2]\}-\frac{\mathrm{P}^2(h-\gamma)^2}{1+4\mathrm{M}b^2}z=0$$

comprise entre h et ρ, racine qui existe toujours, puisque, en vertu des inégalités précédentes, son premier membre est positif pour $z=h$ et négatif pour $z=\rho$.

D'ailleurs, pour $z=z_1$, z' n'est pas nul, car z'^2 est positif tant que l'on a

$$\frac{\mathrm{P}^2(h-\gamma)^2}{1+4\mathrm{M}b^2}>2\mathrm{M}g(z-h) \qquad \text{et} \qquad z_1<\rho.$$

Le mouvement du solide pour $z>z_1$ devient celu d'un solide libre.

3° Si

$$2\mathrm{M}g(\rho-h)<\frac{\mathrm{P}^2(h-\gamma)^2}{1+4\mathrm{M}b^2}<g\left[\frac{1}{\rho}+2\mathrm{M}(\rho-h)\right],$$

z croîtra de h à ρ, le point A restant en contact avec le plan et, z' n'étant pas nul pour $z=\rho$, z décroîtra ensuite jusqu'au moment où AT viendra rencontrer le plan, le point A restant toujours dans le plan.

4° Enfin, si

$$\frac{\mathrm{P}^2(h-\gamma)^2}{1+4\mathrm{M}b^2}<2\mathrm{M}g(\rho-h),$$

z croît de h à $h+\frac{1}{2\mathrm{M}g}\frac{\mathrm{P}^2(h-\gamma)^2}{1+4\mathrm{M}b^2}$, pour décroître de cette valeur à h, le point A restant toujours en contact avec le plan.

CERTIFICATS DE LICENCE

(Marseille, mars 1919).

Analyse infinitésimale.

COMPOSITION ÉCRITE.

Condition pour que les normales principales d'une courbe gauche puissent être aussi les normales principales d'une seconde courbe gauche.

Démontrer que, si la première courbe a un rayon de courbure constant, il en est de même de la seconde et que chacune des deux courbes est l'arête de rebroussement de la surface polaire de l'autre.

SOLUTION.

Soient (x, y, z) et (X, Y, Z) les points correspondants des deux courbes sur la normale principale commune de direction $((\xi, \eta, \zeta)$ et l la distance de ces deux points, on a

$$X = x + l\cos\xi, \qquad \text{d'où} \qquad 0 = \Sigma\, dX \cos\xi,$$

ou

$$dl = 0, \qquad \text{ou} \qquad l = \text{const.}$$

Soit V l'angle des deux tangentes de directions (α, β, γ) et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$; on a

$$d\cos V = \Sigma \cos\xi\, d\sigma \cos\alpha_1 + \Sigma\cos\xi\, d\sigma_1 \cos\alpha = 0,$$

d'où

$$V = \text{const.}$$

Or

$$\cos V = \frac{\Sigma\, dx\, dX}{ds\, ds_1} = \frac{ds^2 - l\, ds\, ds_1}{ds\,[ds^2 + l^2 ds^2 + l^2 d\tau^2 - 2\, l\, ds\, d\sigma]^{\frac{1}{2}}};$$

on a donc

$$\cos V = \frac{1 - \frac{l}{R}}{\sqrt{\left(1 - \frac{l}{R}\right)^2 + \left(\frac{l}{T}\right)^2}}$$

et

$$\sin V = \frac{\frac{l}{T}}{\sqrt{\left(1 - \frac{l}{R}\right)^2 + \left(\frac{l}{T}\right)^2}}.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\frac{l \sin V}{R} + \frac{l \cos V}{T} - \sin V = 0,$$

relation linéaire entre les courbures.

Réciproquement, s'il existe une relation de la forme

$$\frac{A}{R} + \frac{B}{T} + C = 0,$$

on peut l'identifier avec la forme précédente.

Si R est constant et T variable, il faut $B = 0$, c'est-à-dire

$$\cos V = 0, \qquad \sin V = 0 \qquad \text{et} \qquad l = R.$$

L'angle V est donc droit et il n'y a qu'une courbe associée qui est le lieu des centres de courbures de la courbe donnée. C'est aussi, on le sait, le lieu des centres de la sphère osculatrice.

La relation $dX = -\frac{R}{T} \cos\lambda\, dS$ montre que la tangente à la courbe associée est parallèle à la binormale de la proposée, c'est-à-dire est sa droite polaire ou encore est la tangente à l'arête de la surface polaire.

Enfin on a

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{d\sigma_1^2}{ds^2} = \frac{\Sigma(d \cos\lambda)^2}{\Sigma dX^2} = \frac{2}{R^2}, \qquad \text{d'où} \qquad R_1 = R,$$

ce qui prouve que les propriétés des deux courbes sont réciproques.

ÉPREUVE PRATIQUE.

Calculer l'intégrale indéfinie.

$$\mathrm{I} = \int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{5+8x-4x^2}}\,dx$$

en employant la variable u définie par la relation

$$u = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}.$$

Analyser la fonction

$$f(z) = \frac{(z-1)^3}{\sqrt{5+8z-4z^2}}$$

dans les seuls cas où le point z décrit un chemin fermé situé à distance finie dans le plan des z.

SOLUTION.

Si l'on pose

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}} = u, \qquad x = 1 + \frac{3}{2}z,$$

on a

$$u = \frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad z = \sin 2u,$$

$$y = \sqrt{5+8x-4x^2} = 3\cos 2u$$

et

$$\mathrm{I} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \int \sin^3 2u\,du = \frac{9y}{16}\left[\frac{y^2}{27} - 1\right].$$

Mécanique.

COMPOSITION ÉCRITE.

Dans un plan vertical on donne une droite dépolie Ox *qui fait avec l'horizon un angle* α *tel que*

tang $\alpha = 0{,}75$. *Une plaque carrée* ABCD, *homogène et de poids* P *s'appuie sur cette droite par le côté* AB. *Au point* A *est attachée l'une des extrémités d'un fil élastique dont l'autre extrémité est attachée au point fixe* O.

Le fil, dont la masse est négligeable, s'allonge proportionnellement à sa tension et il doublerait de longueur sous l'action d'une tension égale au poids P.

Le coefficient de frottement de la plaque sur Ox *est égal à* 0,5.

A l'origine le système est sans vitesse et le fil a sa longueur naturelle qui est a.

Étudier le mouvement de ce système et examiner si la plaque reste constamment appuyée sur Ox *et ne tend pas à pivoter autour du point* B.

SOLUTION.

OA dirigée vers le bas étant représentée par x, l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x-a}{a} - gf\cos\alpha + g\sin\alpha = -\frac{g}{a}(x - 1{,}2a),$$

d'où, en tenant compte des données initiales,

$$x = a\left[1{,}2 - 0{,}2\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right], \quad \frac{dx}{dt} = 0{,}2\sqrt{ga}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t.$$

La vitesse s'annule au bout du temps $t_1 = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ et x prend la valeur $x_1 = 1{,}4a$. La plaque reste alors en repos; car, d'une part, la composante du poids est 0,6P, et, d'autre part, la tension du fil est 0,4; donc il reste une force dirigée suivant Ox égale à 0,2P et inférieure à $mgf\cos\alpha$ ou à 0,4P.

Soit N la composante normale de la pression de Ox sur la plaque et z sa distance au centre de la plaque. Si l'on applique le théorème des moments par rapport à ce point, et si $2c$ représente le côté du carré, on devra avoir

$$Nz = \left[0,4\,P + P\frac{x-a}{a}\right]c$$

et, comme $N = 0{,}8P$, on aura

$$0,8z = c\left(0,4 + \frac{x-a}{a}\right).$$

Mais $x - a$ est au plus égal à $0,4a$; on a donc $z < c$, ce qui prouve que la plaque ne bascule pas.

ÉPREUVE PRATIQUE.

Sur une même horizontale, on donne un point fixe O et une cheville A parfaitement polie. On attache en O l'une des extrémités d'un fil pesant et homogène. Ce fil s'appuie ensuite sur la cheville A et pend verticalement au-dessous de A.

La distance OA est égale à 2^m et le fil a 4^m de long.

Combien y a-t-il de positions d'équilibre ? Quelle est, quand il y a équilibre, la longueur de la partie AB du fil qui pend verticalement et quelle est la flèche de la chaînette qui va de O en A ?

SOLUTION.

Soit $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ l'équation de la chaînette rapportée à ses axes ordinaires. La longueur de la partie courbe est $a\left(e^{\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}}\right)$ Mais, comme la tension en un point est égale à l'ordonnée, il faut que la longueur

du fil qui pend soit égale à $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{1}{a}}+e^{-\frac{1}{a}}\right)$. Enfin, la longueur du fil étant 4, on doit avoir la relation

$$\frac{3}{2}ae^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{2}ae^{-\frac{1}{a}}=4.$$

En remplaçant $\frac{1}{a}$ par u, on est amené à résoudre l'équation

$$3e^{u}-e^{-u}-8u=0.$$

En bornant les séries à deux termes, on trouve l'équation $u_1^2-4u_1+2=0$ qui a deux racines $2\pm\sqrt{2}$ ou 0,6 et 3,4. Mais l'approximation est insuffisante. Des essais successifs donnent, en posant $z=3e^{u}-e^{-u}-8u$,

$$\begin{array}{lll}
u=0,66, & e^{0,66}=1,9348, & z=0,0076;\\
u=0,67, & e^{0,67}=1,9342, & z=-0,0091;\\
u=1,17, & e^{1,17}=3,2217, & z=-0,0053;\\
u=1,18, & e^{1,18}=3,2528, & z=0,0111.
\end{array}$$

En prenant pour première solution $u=0,66$, on trouve que le fil qui pend a pour longueur

$$\frac{1}{u}\,\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}=1,857$$

et que la flèche est

$$1,857-\frac{1}{0,66}=0,342.$$

Pour la seconde solution, on fera $u=1,17$ et l'on trouvera pour le fil qui pend 1,510 et pour la flèche 0,655.

L'observation des changements de signes de z montre que le premier équilibre seul est stable.

Mathématiques générales.

COMPOSITION ÉCRITE.

Étant données les deux fonctions de la variable t

$$x = \tang\frac{t}{3}, \qquad y = \cos t,$$

montrer qu'à chaque valeur donnée de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires et qu'à chaque valeur donnée de y correspondent six valeurs de x égales deux à deux et de signes contraires. Dans ce dernier cas, la plus petite valeur positive de x étant représentée par x_1 calculer les cinq autres valeurs et les ranger dans un ordre croissant; cas de $y = 1$ et de $y = 0$.

Trouver en éléminant t la relation qui lie x et y et construire la courbe qu'elle représente.

SOLUTION.

Soient $y = \cos t$ et $y_0 = \cos\alpha$, α étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, les valeurs de $\frac{t}{3}$ qui donne des valeurs positives pour x sont $\frac{\alpha}{3}$, $-\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}$, $\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}$ et ces valeurs sont, en croissant, x_1, $\frac{\sqrt{3}-x_1}{1+x_1\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{3}+x_1}{1-x_1\sqrt{3}}$, les valeurs négatives de x ayant les mêmes valeurs absolues.

L'équation de la courbe est $y^2 = \frac{(3x^2-1)^2}{(x^2+1)^3}$.

La courbe, facile à construire, est symétrique par rapport aux axes de coordonnées; et elle est comprise entre les deux droites $y = \pm 1$; elle touche ces droites pour $x = 0$ et pour $x = \pm\sqrt{3}$. Enfin elle touche doublement l'axe des x pour $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = \pm\infty$.

ÉPREUVE PRATIQUE.

Dans un plan vertical un point matériel de poids P *se meut sans frottement sur une cycloïde concave vers le haut et dont la tangente en un sommet est horizontale.*

En admettant que l'on prenne pour axes de coordonnées la tangente et la normale au sommet et que l'on puisse définir la courbe par l'équation $y = \frac{s^2}{8R}$, *où* R *est une longueur donnée,* y *l'ordonnée et* s *l'arc de courbe compté à partir du sommet.*

On demande :

1° *la composante tangentielle du poids;*

2° *l'accélération tangentielle que l'on représentera par* $-\omega^2 s$;

3° *l'expression de l'arc* s *en fonction du temps* t;

4° *la période et la fréquence.*

SOLUTION.

La composante tangentielle est

$$T = P \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{P}{4R} s.$$

On a

$$m = \frac{p}{g}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{4R} s = -\omega^2 s,$$

et, par suite,

$$s = s_0 \sin\omega t \qquad \text{et} \qquad v = \omega s_0 \cos\omega t$$

La période du mouvement oscillatoire est $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la fréquence est $N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2330.

(1917, p. 437).

Démontrer que l'enveloppe des droites sur lesquelles deux hyperboles équilatères déterminent deux segments ayant même milieu M *est l'hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux asymptotes des deux hyperboles; lieu de* M. (J. Lemaire.)

Solution

Par M. L. Maloue.

Soient en général C et C′ deux coniques quelconques et G l'enveloppe des droites D sur lesquelles C et C′ déterminent deux cordes ayant même milieu M.

Pour trouver la classe de G, cherchons combien de droites D passent par un point donné P du plan. Le lieu des milieux des cordes de C qui passent par P est, comme on sait une conique C_1 passant par P; de même le lieu des milieux des cordes de C′ qui passent par P est une conique C'_1 passant par P. C′ et C'_1 ont, outre le point P, trois points communs. On en conclut qu'il y a trois droites D passant par P. G est donc de troisième classe.

Cherchons comment C se comporte à l'égard de la droite de l'infini. Le raisonnement sera plus clair si nous envisageons la question corrélative, qui s'énonce ainsi : C *et* C′ *étant deux coniques données*, A *un point donné*, *étudier la courbe* G′ *lieu des points* M *tels que les droites conjuguées de* MA *par rapport aux deux tangentes issues de* A *à* C *et par rapport aux deux tangentes issues de* A *à* C′ *soient confondues*. On reconnaît tout de suite que G′ a un point double en A et que les tangentes en ce point double sont les rayons doubles du faisceau involutif qui a pour couples de rayons conjugués les tangentes issues de A à C et les tangentes issues de A à C′. En revenant à la question proposée, on voit que G admet pour bitangente la droite de l'infini, les

points de contact I et J étant les points doubles de l'involution qui a pour couples de points conjugués les points à l'infini de C et ceux de C'.

G touche les quatres asymptotes des coniques données : en effet une asymptote de C, par exemple, détermine dans cette conique une corde dont le milieu est indéterminé et peut être, par conséquent, considéré comme confondu avec le milieu de la corde interceptée sur cette asymptote par C'.

Si C et C' sont des hyperboles équilatères, les points I et J deviennent les points cycliques et G est une hypocycloïde à trois retroussements.

Réciproquement, une hypocycloïde à trois rebroussements H peut-être engendrée de la façon indiquée, au moyen de deux hyperboles équilatères ayant pour asymptotes deux systèmes de tangentes à H, rectangulaires : cela résulte de ce qu'une hypocycloïde à trois rebroussements est déterminée d'une façon unique par quatre tangentes[1].

Pour trouver le lieu du point M, désignons par A et B les asymptotes de l'hyperbole équilatère C, par A' et B' celles de C', par O et O' les centres de ces deux courbes. Si l'on désigne par (Z) l'orientation, définie par rapport à un axe fixe quelconque, d'une droite Z, on a, en remarquant que D, OM et A forment un triangle isoscèle, et de même D, O'M et A', les égalités (exactes à π près)

$$(OM) + (D) = 2A, \qquad (O'M) + (D) = 2A',$$

d'où, par soustraction,

$$(O'M) - (OM) = 2(A') - 2(A),$$

ce qui prouve que le lieu de M est un cercle Γ passant en O et en O'. Si l'on désigne par α, β, γ, δ les sommets du quadrilatère formé par les quatre droites A, A' B, B', prises dans cet ordre, on reconnaît que Γ passe par les milieux de $\alpha\gamma$ et de $\beta\delta$, car $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ sont deux droites D.

Γ est donc le cercle des neuf points du triangle $\alpha\beta\gamma$. Il passe en particulier par le point de rencontre de $\alpha\gamma$ et de $\beta\delta$, c'est-à-dire par un point d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à H. Comme cette dernière propriété appartient aussi à O et O', on voit, d'après une propriété bien connue, *que* Γ *est le cercle tritangent* à H.

QUESTIONS.

2419. Soient $ABA'B'$ un quadrilatère circonscrit à une conique de foyers F et F'. On considère les deux groupes de quatre triangles :

$$FAB, \quad FA'B', \quad F'AB', \quad F'A'B;$$
$$FAB', \quad FA'B, \quad F'AB, \quad F'A'B'.$$

Démontrer que :

1° Les cercles circonscrits aux triangles de ces deux groupes passent respectivement par des points C et C', qui sont les deux foyers d'une nouvelle conique inscrite au quadrilatère;
2° les orthocentres des triangles de ces deux groupes sont respectivement sur des droites D et D', toutes deux perpendiculaires à la droite, lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère. R. B.

2420. On donne à un segment AB de longueur constante toutes les positions, dans un plan fixe, telles que les points A, B et deux points fixes A_0 et B_0 du plan soient sur un cercle. Démontrer que l'on peut trouver, d'une infinité de manières un couple de points M, N, invariablement liés au segment AB et un couple de points fixes M_0, N_0, tels que les points M, N, M_0, N_0 soient sur un cercle pour toutes les positions du segment AB satisfaisant la condition indiquée.

Les points M, N sont répartis sur deux droites rectangulaires, et de même les points M_0, N_0. R. B.

ERRATA.

Page 82, dernière ligne, au lieu de « considéré vers », il faut considéré sur ».

Page 88, dernière ligne, la parenthèse placée avant les mots « nous pourrions » doit être reportée avant les mots « section que ».

Page 153, dans l'expression de $\frac{1}{2}\int_0^\omega \rho^2 d\omega$, donnée au milieu de la page, le terme coupé en deux par la mise à la ligne ne doit pas se lire

$$2\sqrt{2}z(h-z)\,ln \times \text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right),$$

mais bien

$$2\sqrt{2}z(h-z).ln\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right),$$

le signe *ln* du logarithme népérien portant sur la fonction

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)$$

pour constituer un des facteurs de ce terme.

[A3e]

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

(Belgrad, Serbie.)

Étant donnée l'équation algébrique *la plus générale*

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

(les coefficients et les racines n'étant assujettis à *aucune restriction*), il est possible, en utilisant certains résultats aujourd'hui connus sur la série de Taylor et les équations (1), d'assigner dans le plan de l'inconnue x une couronne circulaire C contenant sûrement une racine de (1).

Supposons $a_0 \neq o$, $a_1 \neq o$ (ce qui ne diminue nullement la généralité) et soit α la racine de (1) la plus rapprochée de l'origine (ou bien l'une de telles racines, s'il y en a plusieurs de même module). Si l'on forme la fonction

$$(2) \qquad u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{k=n} |a_k|^2 r^{2k},$$

on aura, d'après un théorème général sur la série de Taylor que j'ai démontré dans un Travail antérieur [1],

$$(3) \qquad |\alpha| = \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}},$$

quelle que soit la valeur positive r.

[1] M. PETROVITCH, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXIX.

Lorsque r croît par valeurs réelles de o à ∞, la fonction réelle $u(r)$ commence par décroître, atteint un minimum positif L après lequel elle croît constamment. Par suite, d'après (3), la racine α ne se trouve jamais *à l'intérieur* du cercle C_1 ayant l'origine centre et

$$(4) \qquad R_1 = \frac{|a_0|}{\sqrt{L}}$$

comme rayon.

D'une autre part, d'après un résultat démontré par M. Fejér (²), la racine de moindre module de (1) ne se trouve jamais *à l'extérieur* du cercle C_2 ayant l'origine comme centre et

$$(5) \qquad R_2 = n\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

comme rayon.

Les deux propositions se résument dans le théorème que nous avons en vue et qui est le suivant :

Théorème : *l'équation algébrique* (1) *a au moins une racine dans la couronne circulaire* C *limitée par les deux cercles* C_1 *et* C_2 *(ou sur les bords mêmes de la couronne) et n'a aucune racine entourée par la couronne.*

Les bords, extérieur et intérieur, de la couronne C, représentés par les cercles C_1 et C_2, fournissent les limites *les plus précises* qu'il soit possible d'assigner à la couronne pour que le théorème soit valable dans le cas le plus général. En effet, le bord extérieur C_2

1901, p. 303-312. — E. Landau, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXIII, 1905, p. 251-261. Le signe d'égalité dans (3) est dû à M. Landau.

(¹) L. Fejér : *C. R. de l'Acad. des Sc.*, 1907, t. II, p. 459-461.

de la couronne C correspondant à l'équation

$$(6)\qquad a_0\left(1+\frac{a_1 x}{n a_0}\right)^n = a_0 + a_1 x + \frac{n-1}{2 n a_0} a_1^2 x^2 + \ldots = 0$$

(cas signalé par M. Fejér) est effectivement atteint par les n racines égales de (6). D'une autre part, l'équation

$$(7)\qquad -1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 0$$

admet pour le minimum L une valeur tendant vers 4 et une racine α tendant vers $\frac{1}{2}$ lorsque son degré n augmente indéfiniment; à la valeur limite $L = 4$ correspond la circonférence C_1 de rayon $\frac{1}{2}$ de laquelle s'approche indéfiniment la racine α lorsque n augmente [le cas limite $\frac{-1+2x}{1-x} = 0$ de l'équation (7) a été signalé par M. Landau *loc. cit.*].

L'épaisseur D de la couronne C est

$$(8)\qquad D = R_2 - R_1 = |a_0|\left(\frac{n}{|a_1|} - \frac{1}{\sqrt{L}}\right),$$

et il est impossible de rétrécir la couronne dans un sens ou l'autre sans qu'elle cesse de contenir la racine α dans tous les cas possibles. Comme l'on a

$$L \geqq |a_1|^2,$$

la valeur D ainsi déterminée est supérieure ou égale à $(n-1)\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$.

Dans le cas où la racine α est réelle, elle est comprise dans l'intervalle $(-R_2, -R_1)$ ou bien (R_1, R_2) suivant qu'elle est négative ou positive (pouvant coïncider avec une limite de cet intervalle).

On peut, manifestement, dans le théorème précédent, substituer à L une limite supérieure de cette valeur.

Une telle limite serait, par exemple, la valeur que prend la fonction $u(r)$ pour une valeur positive arbitraire r.

Enfin, nous rappellerons l'existence d'un théorème en quelque sorte opposé au précédent : tandis que celui-ci concerne les racines de l'équation (1) *compris* dans une couronne circulaire n'entourant aucune racine de cette équation, le théorème que nous avons en vue concerne les racines *entourées* par une couronne mais ne contenant elle-même aucune racine. Le théorème, ne supposant que la réalité des coefficients de l'équation (1), fournit une règle pour déterminer exactement le nombre de racines entourées par une telle couronne, ce nombre étant fourni comme partie entière d'une certaine expression numérique qui s'exprime *algébriquement* à l'aide des coefficients a_k, du rayon et de l'épaisseur de la couronne ([1]).

[A1b]

SUR L'IDENTITÉ DE BEZOUT;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

1. On sait qu'à deux polynomes entiers en x, A et B, premiers entre eux, des degrés respectifs m et p, on peut adjoindre deux nouveaux polynomes, et deux seulement, U_1 de degré $p-1$ au plus, V_1 de

---

([1]) M. PETROVITCH : *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXVI, 1908, p. 141-150.

degré $m - 1$ au plus, tels que l'on ait

$$AU_1 + BV_1 \equiv 1. \tag{1}$$

Les polynomes les plus généraux U et V satisfaisant à l'identité

$$AU + BV \equiv 1. \tag{2}$$

dite *identité de Bezout*, ont pour expression générale

$$\left\{ \begin{array}{l} U \equiv U_1 + B f(x), \\ V \equiv V_1 - A f(x), \end{array} \right. \tag{3}$$

où f est un polynome arbitraire.

On peut établir ce résultat en prenant pour inconnues les $m+p$ coefficients de U_1 et V_1, qui satisfont à $m+p$ équations linéaires non homogènes, admettant pour déterminant le résultant de A et B supposé non nul; si donc A et B sont donnés explicitement, l'identité (2) est complètement résolue.

Augmentons l'indétermination en donnant non plus A et B, mais simplement les degrés m et p. Nous considérons, en nous en tenant à la méthode précédente, comme paramètres arbitraires les $m+1$ coefficients a de A, les $p+1$ coefficients b de B; les coefficients de U_1 et V_1 s'expriment par des fractions rationnelles des a et b, admettant comme dénominateur le résultant de A et B. On peut adresser à ce procédé plusieurs critiques : d'abord, une fois m et p fixés, il faut, pour calculer U_1 et V_1, résoudre un système de $m+p$ équations, linéaires, il est vrai; on sait que l'expression du résultant est assez compliquée, même pour des valeurs petites des entiers m et p. Deuxièmement, U_1 et V_1 sont de degré égal exactement à $p-1-h$ et $m-1-h$ respectivement où h est un entier indéterminé, positif ou nul : si les a et b sont choisis arbitrairement, h est

nul; si l'on annule les termes en x^{p-1}, x^{p-2}, ..., x^{p-h} dans U_1, on obtient h équations de condition entre les $m+p+2$ paramètres a et b, mais la méthode ne donne pas le moyen d'exprimer les coefficients de A, B, U_1, V_1 au moyen du nombre minimum $m+p+2-h$ d'arbitraires. La méthode que je vais proposer évite ces objections et donne l'expression explicite des coefficients de A, B, U_1, V_1 au moyen du nombre minimum d'arbitraires; le résultat est même remarquable de simplicité : tous les coefficients sont des polynomes entiers par rapport aux arbitraires.

2. Je pose donc le problème sous la forme suivante :

Trouver quatre polynomes entiers en x satisfaisant à l'identité

$$AD - BC \equiv 1. \tag{4}$$

La suite justifiera ce changement de notations.

Je rappellerai, en hommage à la mémoire de M. Darboux, que c'est lui qui me suggéra, à la fin de novembre 1916, l'idée fort simple, dont j'ai tiré parti depuis, pour arriver à la solution exposée ici. Remarquons que AD — BC n'est autre chose que le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$; connaissant deux solutions (ABCD), (A'B'C'D') de l'identité (4), multiplions les déterminants correspondants; nous avons une troisième solution où les degrés sont plus élevés que dans les deux solutions primitives.

Or, par des calculs presque négligeables, on obtient aisément des solutions en polynomes du premier degré ou constantes; des multiplications, des élévations aux puissances successives donneront donc des solutions de degré de plus en plus élevé. Quelque temps après, pen-

dant une journée calme sur le front de la Somme, en janvier 1917, j'apercevais le véritable parti à tirer de la remarque de M. Darboux, qui inséra mon résultat aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 22 janvier 1917.

3. Je précise cette notion de *composition* de solutions; (ABCD) et (A'B'C'D') étant la première et la deuxième solution, je multiplie les déterminants correspondants par la règle précise

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AA'+CC' & BA'+DC' \\ AB'+CD' & BB'+DD' \end{vmatrix}$$

et j'écrirai schématiquement

$$(6)\qquad (ABCD)(A'B'C'D') = (AA'+CC',\ BA'+DC',\ AB'+CD',\ BB'+DD').$$

J'appelle la solution mise en évidence au second membre de (6) produit de la solution (ABCD) par la solution (A'B'C'D'). Cette multiplication n'est pas commutative; si l'on échange les deux facteurs, au second membre le premier et le quatrième terme restent ce qu'ils sont, mais le second et le troisième se permutent. Étant donné un nombre quelconque de facteurs avec leur ordre, je multiplie le premier par le second, ce produit par le troisième, et ainsi de suite jusqu'à épuisement. On ne peut ni changer l'ordre ni remplacer plusieurs facteurs, consécutifs ou non, par leur produit effectué.

Je désigne par a, b, c, d les degrés respectifs de A, B, C, D. On a $a+d=b+c$ ou encore $c-a=d-b$. Deux hypothèses s'offrent à nous : $c\geqq a$ ou $c\leqq a$. Adoptons la première pour fixer les idées; on a alors $d\geqq b$. C divisé par A donne δ pour quotient, C_1 pour reste,

D divisé par B donne δ' pour quotient, D_1 pour reste et j'écris

$$(7) \quad \begin{cases} C \equiv A\delta + C_1, \\ D \equiv B\delta' + D_1, \end{cases}$$

$$(8) \quad AD_1 - BC_1 + AB(\delta' - \delta) \equiv 1.$$

Je suppose que a et b soient d'abord, ou tous deux, ou un seul, de degré effectivement supérieur à zéro : alors, si δ' et δ ne sont pas identiques, $AB(\delta' - \delta)$ est au moins de degré $a + b$, tandis que $AD_1 - BC_1$ est au plus de degré $a + b - 1$: $a + b$ n'étant pas nul, il ne pourrait y avoir identité entre les deux membres de (8), donc

$$\delta' \equiv \delta, \qquad AD_1 - BC_1 \equiv 1.$$

Je peux donc écrire simplement

$$(9) \quad \begin{cases} C \equiv A\delta + C_1, & AD - BC \equiv AD_1 - BC_1 \equiv 1; \\ D \equiv B\delta + D_1, & (ABCD) \equiv (ABC_1D_1)(1\delta 01). \end{cases}$$

J'ai donc ramené, d'une façon unique, pourvu que A et B ne soient pas numériques tous les deux, la solution (ABCD), où le couple (AB) est de degré inférieur au couple (CD), à la solution (ABC_1D_1) que j'appellerai la *solution consécutive*, formée avec le même couple (AB) et un nouveau couple (C_1D_1), de degré inférieur cette fois au couple (AB) : il a suffi pour cela d'une division opérée sur C et A et d'une division opérée sur D et B.

Le résultat est légèrement modifié si $a = b = 0$; la division donnerait en effet

$$\delta = \frac{C}{A}, \qquad \delta' = \frac{D}{B}, \qquad C_1 = 0, \qquad D_1 = 0$$

et

$$AB\left(\frac{D}{B} - \frac{C}{A}\right) \equiv 1.$$

Pour faire rentrer ce cas dans le précédent, je conviens d'écrire soit

$$(10)\quad \begin{cases} C \equiv A\dfrac{C}{A} + 0, & (ABCD) \equiv \left(AB0\,\dfrac{1}{A}\right)\left(1\,\dfrac{C}{A}\,01\right), \\ D \equiv B\dfrac{C}{A} + \dfrac{1}{A}, & C_1 = 0\; D_1 = \dfrac{1}{A}, \quad AD_1 - BC_1 \equiv 1; \end{cases}$$

soit

$$(11)\quad \begin{cases} C \equiv A\dfrac{D}{B} - \dfrac{1}{B}, & (ABCD) \equiv \left(AB\,\dfrac{-1}{B}\,0\right)\left(1\,\dfrac{D}{B}\,01\right), \\ D \equiv B\dfrac{D}{B} + 0, & C_1 = -\dfrac{1}{B}, \quad D_1 = 0, \quad AD_1 - BC_1 \equiv 1, \end{cases}$$

et dans ce cas la solution consécutive peut prendre deux formes et deux seulement.

4. La question est donc dès maintenant virtuellement résolue.

En effet, ou bien l'un des quatre polynomes est numérique : A, par exemple; alors on a la réduction

$$\left(\lambda,\ F(x),\ 0,\ \frac{1}{\lambda}\right)(1,\ f(x),\ 0,\ 1),$$

où λ est une constante arbitraire non nulle, F et f étant deux polynomes arbitraires.

Ou bien aucun des polynomes n'est numérique; dans ce cas, (AB) étant le couple de degré inférieur, j'ai écrit

$$(9')\qquad (ABCD) \equiv (ABC_1D_1)\ (1\,\delta\,01),$$

et pour la même raison la division de A par C_1 et B par D_1 donne

$$(12)\quad \begin{cases} A \equiv C_1\varepsilon + A_1, & AD_1 - BC_1 \equiv A_1D_1 - B_1C_1 \equiv 1, \\ B \equiv D_1\varepsilon + B_1, & (ABC_1D_1) \equiv (A_1B_1C_1D_1)(10\varepsilon 1), \end{cases}$$

dans la formule (9') je peux donc modifier le second

membre par la tête et écrire

$$(13)\qquad (ABCD) \equiv (A_1 B_1 C_1 D_1)(1\,0\,\varepsilon\,1)(1\,\delta\,0\,1).$$

Le raisonnement se poursuit donc indéfiniment : par une marche en escalier, le premier ou le second couple sont, alternativement, remplacés par un couple plus simple, l'autre étant conservé. Les opérations à faire sont précisément celles que l'on rencontre dans la théorie du plus grand commun diviseur appliquée à C et A d'une part, D et B de l'autre : les quotients successifs sont les mêmes dans les deux opérations menées parallèlement et l'opération se termine dès que, dans l'une des suites de diviseurs, on obtient un diviseur numérique non nul, chose qui arrive nécessairement puisque A et C d'une part, B et D de l'autre, sont deux polynomes premiers entre eux.

5. Je vais donc écrire sur deux lignes parallèles les diviseurs ou restes successifs de l'opération effectuée sur C, A et sur D, B, et sur une troisième les quotients

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{llllllllll} C & A & C_1 & A_1 & \ldots & C_{i-1} & A_{i-1} & C_i & A_i & \ldots\ldots \\ D & B & D_1 & B_1 & \ldots & D_{i-1} & B_{i-1} & D_i & B_i & \ldots\ldots \\ & \delta & \varepsilon & \delta_1 & \ldots & \varepsilon_{i-2} & \delta_{i-1} & \varepsilon_{i-1} & \delta_i & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

J'écris les identités analogues à (9) et (12) :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} A_{i-1} \equiv C_i\varepsilon_{i-1} + A_i, & A_{i-1}D_i - B_{i-1}C_i \equiv A_iD_i - B_iC_i \equiv 1, \\ B_{i-1} \equiv D_i\varepsilon_{i-1} + B_i, & (A_{i-1}B_{i-1}C_iD_i) \equiv (A_iB_iC_iD_i)(1\,0\,\varepsilon_{i-1}\,1), \\ C_i \equiv A_i\delta_i + C_{i+1}, & A_iD_i - B_iC_i \equiv A_iD_{i+1} - B_iC_{i+1} \equiv 1. \\ D_i \equiv B_i\delta_i + D_{i+1}, & (A_iB_iC_iD_i) \equiv (A_iB_iC_{i+1}D_{i+1})(1\,\delta_i\,0\,1). \end{array}\right.$$

De sorte que les identités (9′) ou (13) modifiées de proche en proche toujours par la tête donnent évidemment

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} (ABCD) \equiv (A_iB_iC_iD_i)\,(1\,0\,\varepsilon_{i-1}\,1)\,(1\,\delta_{i-1}\,0\,1)\;\ldots(1\,\delta\,0\,1) \\ \qquad\equiv (A_iB_iC_{i+1}D_{i+1})\,(1\,\delta_i\,0\,1)\,(1\,0\,\varepsilon_{i-1}\,1)\ldots(1\,0\,\varepsilon\,1)\,(1\,\delta\,0\,1). \end{array}\right.$$

Il suffit maintenant d'une discussion sans difficulté pour apercevoir les diverses formes de réduction complète. J'avais eu à opter entre $c \geqq a$ et $a \geqq c$; j'ai adopté $c \geqq a$. En appelant a_i le degré de A_i, b_i, c_i, d_i ceux de B_i, C_i, D_i, on a manifestement

$$a_{i-1} - b_{i-1} = c_i - d_i = a_i - b_i = \ldots;$$

la valeur commune est donc $a - b$ ou $c - d$; j'ai donc à opter encore entre $c - d \geqq 0$ ou $c - d \leqq 0$. Adoptons la première hypothèse : chaque polynome de la première ligne (14) a donc un degré surpassant du nombre constant $(c - d)$ le degré du polynome écrit en-dessous. C'est donc la seconde ligne qui s'arrête la première sur un polynome réduit à une constante numérique non nulle, et j'ai alors encore à opter entre le cas où ce polynome est un D ou un B. J'ai donc au total huit cas à considérer. Adoptons d'abord le cas où D_n est numérique : alors ce que j'ai fait remarquer au n° 3 sur la solution $(A_{n-1} B_{n-1} C_n D_n)$ montre que je peux continuer la division pour A_{n-1}, C_n de façon à terminer la première ligne par le reste numérique $\frac{1}{D_n}$ et la seconde ligne par zéro. J'ai donc, en représentant par λ le nombre $\frac{1}{D_n}$,

$$A_n = \lambda, \qquad B_n = 0, \qquad D_n = \frac{1}{\lambda},$$

Je remplace C_n par le symbole $F(x)$ et j'écris, en appliquant la première formule (16), où $i = n$,

$$(17) \quad (ABCD) = \left(\lambda, 0, F(x), \frac{1}{\lambda}\right) \times (1\, 0\, \varepsilon_{n-1}\, 1)(1\, \delta_{n-1}\, 0\, 1)\ldots(1\, 0\, \varepsilon_1\, 1)(1\, \delta\, 0\, 1).$$

Si, au contraire, j'adopte (avec $a \leqq c$, $d \leqq c$) le cas

où le polynome numérique non nul de la seconde ligne (14) est un B à savoir B_n, je continue à diviser C_n par A_n et j'obtiens un reste numérique non nul en première ligne; toujours d'après le n° 3, je termine la première ligne par ce reste,

$$C_{n+1} = \frac{-1}{B_n} = \frac{-1}{\lambda},$$

tandis que la deuxième se termine par $D_{n+1} = 0$; j'applique la seconde formule (16) en y faisant $i = n$ et remplaçant A_n par $F(x)$,

$$(18) \quad (ABCD) = \left(F, \lambda, \frac{-1}{\lambda}, 0\right) \times (1\,\delta_n\,0\,1)(1\,0\,\varepsilon_{n-1}\,1)\ldots(1\,0\,\varepsilon\,1)(1\,\delta\,0\,1).$$

Dans les deux formules (17) ou (18), F est un polynome de degré $c - d$. Si $c > d$, la réduction est possible d'une seule façon; si $c = d$, F est une constante non nulle; on a vu alors que la réduction est possible de deux façons, mais que le changement ne porte que sur les deux premières parenthèses.

Si, conservant l'hypothèse $c \geqq a$, j'adopte $d \geqq c$, c'est la première ligne qui se termine, un rang avant la seconde, par un polynome égal à une constante numérique non nulle; mais, comme précédemment, on pousse l'opération du plus grand commun diviseur jusqu'à sa fin pour la seconde ligne, et l'on a l'une des deux réductions

$$(19) \quad (ABCD) = \left(0, \lambda, \frac{-1}{\lambda}, F(x)\right) \times (1\,0\,\varepsilon_{n-1}\,1)(1\,\delta_{n-1}\,0\,1)\ldots(1\,0\,\varepsilon\,1)(1\,\delta\,0\,1),$$

$$(20) \quad (ABCD) = \left(\lambda, F(x), 0, \frac{1}{\lambda}\right) \times (1\,\delta_n\,0\,1)(1\,0\,\varepsilon_{n-1}\,1)\ldots(1\,0\,\varepsilon\,1)(1\,\delta\,0\,1),$$

suivant que c'est C_n ou A_n qui est la constante numérique non nulle.

Pour achever, il faut donc passer à l'hypothèse $a \geqq c$. Pour pouvoir utiliser ce qui précède, j'écris

$$(21)\quad \begin{cases} A = C\varepsilon' + A' \\ B = D\varepsilon' + B' \end{cases} \qquad (ABCD) = (A'B'CD)(1\,0\,\varepsilon'\,1).$$

Mais alors $(A'B'CD)$ se décompose par l'une des formules (17), (18), (19), (20); pour obtenir (ABCD), il suffira donc d'écrire $(1\,0\,\varepsilon'\,1)$ à la suite de chacun des seconds membres.

6. Je modifie légèrement les notations et j'énonce le résultat suivant : la solution la plus générale de l'identité $AD - BC \equiv 1$ peut être décomposée en l'un des produits suivants :

$$(22)\quad \begin{cases} \left[0, \lambda, \frac{-1}{\lambda}, F(x)\right][1, 0, \varphi_1(x), 1][1, f_1(x), 0, 1][1, 0, \varphi_2(x), 1]\ldots, \\ \left[\lambda, 0, F(x), \frac{1}{\lambda}\right][1, 0, \varphi_1(x), 1][1, f_1(x), 0, 1][1, 0, \varphi_2(x), 1]\ldots, \\ \left[\lambda, F(x), 0, \frac{1}{\lambda}\right][1, f_1(x), 0, 1][1, 0, \varphi_1(x), 1][1, f_2(x), 0, 1]\ldots, \\ \left[F(x), \lambda, \frac{-1}{\lambda}, 0\right][1, f_1(x), 0, 1][1, 0, \varphi_1(x), 1][1, f_2(x), 0, 1]\ldots \end{cases}$$

A partir de la seconde, les parenthèses sont alternativement du type $(1, 0, \varphi, 1)$ ou $(1, f, 0, 1)$. Le nombre des parenthèses est fini, bien entendu ; en tenant compte de la parité, les formes (22) sont au nombre de 8, conformément à la discussion.

D'après ce qui a été dit, le polynome (F) est de degré égal à $|c - d|$, nombre positif ou nul ; si F est numérique, cette valeur numérique n'est pas nulle.

De même, la dernière parenthèse renferme un poly-

nome f ou φ de degré égal à $|c-a|$, nombre positif ou nul ; si ce polynome est numérique, cette valeur numérique n'est pas nulle.

Quant aux autres polynomes f et φ ils sont arbitraires, mais de degré au moins égal à l'unité.

Réciproquement, toute expression de la forme (22) étant manifestement composée de facteurs tous solutions de $AD - BC \equiv 1$ donne une solution de cette identité. Si les F, f et φ satisfont aux restrictions qui viennent d'être énoncées, les paramètres arbitraires indépendants sont mis en évidence : ce sont les coefficients de F et des polynomes f, φ.

Les résultats annoncés à la fin du n° 1 sont donc bien justifiés.

Je remarque que si $c > a$ sans égalité, la dernière parenthèse est du type $(1, f, 0, 1)$ et le degré, non nul, du polynome f donne la valeur de $c - a$. La décomposition n'est possible que d'une façon si $c \neq d$; si $c = d$, il y a deux décompositions ne différant que par l'ensemble des deux premières parenthèses. Dans la seconde ou quatrième forme (22), le degré de F donne la valeur commune de $c - d$ ou $a - b$; dans la première et deuxième forme, ce degré donne $d - c$ ou $b - a$.

Si $c < a$ sans égalité, la dernière parenthèse est du type $(1, 0, \varphi, 1)$, le degré de φ donne $a - c$. Ce qui vient d'être dit pour $c \gtrless d$ et F subsiste.

Enfin, si $c = a$, comme les opérations du plus grand commun diviseur pour C et A peuvent se faire soit en divisant C par A, soit en divisant A par C, il y a au début deux routes à choisir, de sorte que si $c = a$ et $c \neq d$, il y a deux réductions possibles, et que, si $c = a = d = b$, il y a au total quatre réductions possibles.

7. J'achève par quelques remarques bien simples : en se plaçant au point de vue de M. Darboux, les solutions particulières de $AD - BC \equiv 1$ sont évidentes quand un des polynomes A, B, C, D est nul; le premier facteur, dans les formules (22), en donne l'expression. On pouvait donc dire qu'il suffisait de multiplier un nombre arbitraire de telles solutions; les formules (22) ne comprennent, en effet, que des facteurs de ce type, mais avec certaines réserves évidentes.

D'autre part, si, dans les formules (22), on suppose que F ainsi que les φ ou les f sont des polynomes entiers à plusieurs variables, on obtient des solutions de l'identité de Bezout en polynomes à plusieurs variables. Ce cas mériterait d'ailleurs une étude spéciale.

Je traite comme application le problème posé au n° 1 : trouver quatre polynomes A, B, U, V tels que l'on ait $AU + BV \equiv 1$, sachant que le polynome inconnu A est de degré m, et le polynome inconnu B de degré p. J'ai dit qu'il suffit de trouver les solutions de $AU_1 + BV_1 \equiv 1$, où U_1 est de degré inférieur à B et V_1 de degré inférieur à A; en échangeant au besoin A avec B et U_1 avec V_1, on peut supposer le degré de A supérieur à celui de B; je pose $U_1 \equiv D$, $V_1 \equiv -C$ et, d'après ce qui a été dit plus haut, j'aurai soit

$$(23)\quad (ABCD) \equiv \left[F, \lambda, \frac{-1}{\lambda}, 0\right] \times [1, f_1(x), 0, 1]\,[1, 0, \varphi_1(x), 1]\ldots[1, 0, \varphi_n(x), 1],$$

soit

$$(24)\quad (ABCD) \equiv \left[\lambda, 0, F, \frac{1}{\lambda}\right] \times [1, 0, \varphi_1(x), 1]\,[1, f_1(x), 0, 1]\ldots[1, 0, \varphi_n(x), 1].$$

J'appelle h_i le degré de $f_i(x)$, k_i celui de $\varphi_i(x)$.

On trouve aisément dans le premier cas

$$(25)\qquad h_1+k_1+h_2+k_2+\ldots+h_n+k_n=p,$$

et dans le second

$$(26)\qquad k_1+h_1+k_2+h_2+\ldots+k_{n-1}+h_{n-1}+k_n=p.$$

Quant au degré de F, il est égal à $m-p$. Donc, pour obtenir la forme (23), il suffit de trouver $2n$ entiers positifs non nuls dont la somme vaut p; pour obtenir la forme (24), il suffit de trouver $2n-1$ entiers positifs non nuls dont la somme vaut p. (Remarquons qu'ici, avec l'hypothèse précise adoptée, D ou U_1 est de degré inférieur à celui de B et non égal, le degré de φ_n n'est donc pas nul.) Il suffira donc de cataloguer les solutions des équations (25) ou (26). Une telle solution adoptée, quel est le nombre des arbitraires? Les arbitraires sont λ, et les coefficients de F des f et des φ. On trouve donc pour (23) le total

$$1+(m-p+1)+(h_1+1)+(k_1+1)+\ldots+(h_n+1)+(k_n+1)$$

ou

$$m+2+2n,$$

et pour (24) le total

$$1+(m-p+1)+(k_1+1)+(h_1+1)+\ldots+(k_n+1)$$

ou

$$m+2+(2n-1).$$

Comme l'on a $2n\leqq p$ pour (23) et $(2n-1)\leqq p$ pour (24), le nombre d'arbitraires est au plus égal à $m+p+2$, et il ne devient égal à cette limite supérieure que si tous les h et k sont égaux à 1, et alors, si p est pair, on obtient nécessairement la forme (23) avec $n=\frac{p}{2}$, et si p est impair on a la forme (24) avec $n=\frac{p-1}{2}$.

Pour avoir le nombre minimum d'arbitraires, il faut au contraire prendre évidemment la forme (24) avec $n = 1$, φ_1 étant de degré p, de sorte que

$$A \equiv \lambda + F\varphi_1, \qquad B \equiv \frac{\varphi_1}{\lambda}, \qquad C \equiv - V_1 \equiv F, \qquad D \equiv \frac{1}{\lambda},$$

on a une solution avec $m + 3$ arbitraires.

Si l'on remarque que, avec la forme (23), on peut écrire, en vertu de (25),

$$2n = p - (h_1 - 1) - (k_1 - 1) - \ldots - (h_n - 1) - (k_n - 1),$$

et que, avec la forme (23), on peut écrire de même

$$2n - 1 = p - (k_1 - 1) - (h_1 - 1) - \ldots - (h_{n-1} - 1) - (k_n - 1),$$

on voit que, dans tous les cas, la différence entre le nombre d'arbitraires maximum $m + p + 2$ et le nombre d'arbitraires effectivement en jeu s'obtient en retranchant une unité du degré de chaque polynome f ou φ et faisant la somme de ces différences. Ce résultat précise et complète celui que j'avais indiqué à la fin du n° I.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1914.

Composition de mécanique.

Mouvement d'une bille dans une cuvette. — Une bille homogène sphérique est abandonnée sans vitesses initiales sur la surface intérieure hémisphérique d'une cuvette fixe dont l'axe de symétrie est vertical et qui est concave vers le haut.

On demande d'étudier le mouvement de la bille sur la cuvette.

On s'attachera à résoudre les questions suivantes concernant ce mouvement :

I. On admettra d'abord que la bille puisse être assimilée à un point matériel A.

1° On indiquera la nature de son mouvement quand les corps en contact seront parfaitement polis;

2° On considérera ensuite le cas où le coefficient de frottement f de la bille sur la cuvette n'est pas négligeable. On déterminera d'abord la condition d'équilibre par une position initiale déterminée A_0 de A (on désignera par φ_0 la valeur initiale, comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle φ de OA avec la verticale descendante Oz). Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, le point A se déplacera pendant quelque temps dans un sens déterminé sur un cercle Γ. On se bornera, pour le moment, à calculer l'expression de la vitesse v de A en fonction de l'angle φ pendant cet intervalle de temps T.

II. On résoudra ensuite les mêmes questions dans le cas où le rayon r de la bille n'est pas négligeable.

Mais lorsque le frottement de glissement est appréciable, on se bornera (en négligeant le frottement de roulement) au cas où la bille roule sans glisser dès l'instant initial. Montrer que, pour une position initiale donnée, A_0, du centre A de la bille, cette circonstance se produit nécessairement si le coefficient de frottement f est assez grand. (On appellera dans ce cas w la vitesse de A et Ω la vitesse instantanée de rotation de la bille).

III. Trouver une valeur approchée de $\frac{w^2}{v^2}$, w et v

étant calculés pour une même position de OA très voisine de la position initiale commune OA_0 et pour une même valeur du coefficient f, quand le rayon r qui intervient dans ω^2 est très petit.

IV. D'une façon générale, comparer les résultats obtenus dans le paragraphe I avec ceux que fournit le paragraphe II quand le rayon r de la bille tend vers zéro, les valeurs de φ_0 et de f (nulles ou non) restant les mêmes. On constatera que ces résultats sont différents et l'on indiquera en peu de mots l'origine de ce paradoxe.

V. On reviendra au cas où la bille est réduite à un point matériel. Montrer que, pendant l'intervalle de temps T, la vitesse v de la bille supposée rugueuse est inférieure à celle de V qu'elle possèderait si elle était polie quand elle passe au même point, à partir de la même position initiale A_0.

VI. On poursuivra ensuite l'étude du mouvement de la bille réduite à un point matériel et l'on indiquera les diverses circonstances qui peuvent se présenter suivant la valeur de f et la position de A_0 (sans se limiter cette fois à l'intervalle de temps T où la vitesse de A ne change pas de sens).

VII. On indiquera en particulier ce qui se passe quand la valeur φ_0 est prise égale à 32°, puis à 60°, le coefficient de frottement ayant dans les deux cas la valeur 0,75, puis la valeur $\frac{1}{2}$.

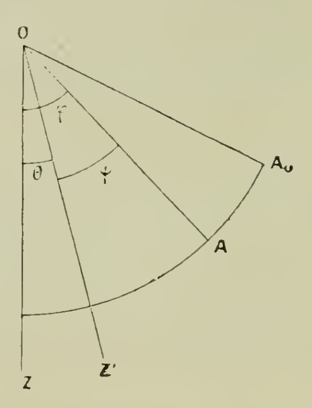
Notations. — On appellera ρ le rayon intérieur de la cuvette, O son centre et mg le poids de la bille. On

trouvera peut-être commode de poser $\tang\theta = f$ et $\tang\theta' = 2f$.

SOLUTION

Par M. DE SPARRE.

Je considère d'abord le cas de la bille assimilée à un point, en réunissant les paragraphes I, V, VI et VII.



Dans ce cas, le point A décrit un cercle vertical de rayon ρ, et, N étant la pression du point, v sa vitesse et m sa masse, on a

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\varphi - Nf,$$

$$N = mg\cos\varphi + \frac{mv^2}{\rho}.$$

Comme d'ailleurs

$$v = -\rho\frac{d\varphi}{dt},$$

on déduit des équations précédentes

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - f\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{g}{\rho}(\sin\varphi - f\cos\varphi) = 0.$$

Mais si l'on pose

$$f = \tang\theta,$$

cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - f\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{g}{\rho\cos\theta}\sin(\varphi - \theta) = 0,$$

et, si l'on pose de nouveau

$$\psi = \varphi - \theta, \qquad l = \rho\cos\theta,$$

elle devient

(1) $$\frac{d^2\psi}{dt^2} - f\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\psi = 0.$$

Cette équation (1) est celle du mouvement d'un pendule de longueur l dans un milieu résistant, la résistance R étant proportionnelle au carré de la vitesse et donnée par la formule

$$\frac{R}{ml} = f\frac{d\psi^2}{dt^2}.$$

On se trouve donc ramené à un problème connu,

On voit que le mouvement du point A est celui d'un pendule dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse et pour lequel la verticale est dirigée suivant la droite oz' faisant avec oz, du côté du point de départ, un angle θ.

On conclut de cette remarque :

1° Que pour que le point A se mette en mouvement, il faut que l'on ait

$$\varphi_0 > \theta;$$

2° Que, si φ_1 est la valeur de φ à la fin de la première oscillation, comme on a pour le pendule dans un milieu résistant $\psi_1 > -\psi_0$, ψ_1 étant la valeur corres-

pondante de ψ, on aura

$$\varphi_1 - \theta > -\varphi_0 + \theta$$

ou

(2) $$\varphi_1 > 2\theta - \varphi_0.$$

Si le mouvement doit se continuer après la première oscillation, il faut, comme on sait, appliquer à la seconde oscillation les résultats obtenus pour la première en considérant la valeur initiale comme étant $-\varphi_1$.

On en conclut :

3° Que le mouvement ne pourra se continuer que si φ_1 est négatif et que l'on ait

$$-\varphi_1 > \theta.$$

En tenant compte de l'inégalité (2), il ne pourra donc y avoir une seconde oscillation que si l'on a

$$\varphi_0 > 3\theta.$$

Cette condition nécessaire n'est toutefois pas suffisante.

De ce qui précède résulte aussi la réponse au paragraphe V.

En effet, la vitesse du mobile A est, dans le cas du frottement, celle d'un pendule dans un milieu résistant, l'angle d'écart initial étant $z'OA_0 = \varphi_0 - \theta$. Or on sait que, pour le mouvement du pendule dans un milieu résistant, la vitesse est, pour une valeur donnée de l'écart, plus faible que dans le vide. On a donc

$$\begin{aligned} v^2 &< 2gl(\cos\psi - \cos\psi_0) \\ &= 2g\rho\cos\theta[\cos(\varphi - \theta) - \cos(\varphi_0 - \theta)], \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} v^2 < {} & 2g\rho\cos^2\theta(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \\ & - 2g\rho\cos\theta\sin\theta(\sin\varphi_0 - \sin\varphi). \end{aligned}$$

Donc, V étant la vitesse pour $\theta = 0$,

$$v^2 < V^2 \cos^2\theta - 2g\rho\cos\theta\sin\theta(\sin\varphi_0 - \sin\varphi),$$

et par suite

$$v^2 < V^2.$$

Si nous passons maintenant au paragraphe VII, nous remarquerons d'abord que de

$$\tang\theta = 0,75$$

on déduit

$$\theta = 36^\circ 52',2, \qquad 2\theta = 73^\circ 44',4.$$

et de

$$\tang\theta = \frac{1}{2}$$

on déduit

$$\theta = 26^\circ 33',9, \qquad 2\theta = 53^\circ 7',8.$$

Donc si

$$\varphi_0 = 32^\circ \quad \text{et} \quad f = 0,75,$$

on aura

$$\varphi_1 > 2\theta - \varphi_0 = 41^\circ 44',4 ;$$

si

$$\varphi_0 = 32^\circ \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2},$$

on aura

$$\varphi_1 > 2\theta - \varphi_0 = 21^\circ 7',8 ;$$

si

$$\varphi_0 = 10^\circ \quad \text{et} \quad f = 0,75,$$

on aura

$$\varphi_1 > 2\theta - \varphi_0 = 13^\circ 44',4,$$

et, dans ces trois cas, le point A n'atteindra pas la verticale, et le mouvement s'arrêtera à la fin de la première oscillation.

Si

$$\varphi_0 = 60^\circ \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2},$$

l'inégalité (2) donnerait

$$\varphi_1 > 2_1 - \varphi_0 = -6^\circ 52',2.$$

Donc, si l'on s'arrêtait à cette condition, le mobile pourrait atteindre la verticale, mais le mouvement s'arrêterait toujours à la fin de la première oscillation, car on a

$$\varphi_0 < 3\theta = 79^\circ 41',7.$$

En réalité, d'ailleurs, le mobile n'atteindra pas la verticale. On peut, en effet, ainsi qu'on le sait pour le pendule, obtenir une intégrale première de l'équation (1).

Il suffit pour cela de poser

$$u = \frac{d\psi^2}{dt^2};$$

elle devient

$$\frac{du}{d\psi} - 2fu + 2\frac{g}{l}\sin\psi = 0,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de ce que $u = 0$ pour $\psi = \psi_0 = \varphi_0 - \theta$,

$$u = \frac{2g}{l(1+4f^2)} \times \left\{ \cos\psi + 2f\sin\psi - [\cos\psi_0 + 2f\sin\psi_0]\, e^{-2f(\psi_0-\psi)} \right\}.$$

Si l'on tient compte des relations

$$\psi = \varphi - \theta, \qquad l = \rho\cos\theta, \qquad u = \frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{d\varphi^2}{dt^2},$$

et si de plus on pose

$$\tang\theta' = 2f,$$

on aura

$$(3) \quad \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2g\cos\theta'}{\rho\cos\theta} \times [\cos(\varphi - \theta - \theta')\cos(\varphi_0 - \theta - \theta')\, e^{-2f(\varphi_0-\varphi)}].$$

Pour reconnaître si dans le cas de $\varphi_0 = 60^\circ, f = \frac{1}{2}$; donc $\theta = 26^\circ,33',9$ et $\theta' = 45^\circ$, le mobile atteint la

verticale, il faut voir le signe de la quantité entre crochets dans l'équation (3) pour $\varphi = 0$.

Or, dans le cas actuel,

$$\theta + \theta' = 71^\circ 33', 9, \qquad 2f\varphi_0 = \varphi_0 = 1{,}0472,$$

et l'on en déduit

$$\cos(71^\circ 33', 9) - \cos(11^\circ 33', 9)\, e^{-\varphi_0} = -0{,}02756.$$

Le mobile n'atteint donc pas la verticale, mais il en arrive assez près. Si l'on veut avoir une approximation de l'angle d'écart final φ_1, on aura, en négligeant les termes en φ_1^2 et tenant compte de ce que $2f = 1$,

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \theta') + \varphi_1 \sin(\theta + \theta')\\ - \cos(\varphi_0 - \theta - \theta')\, e^{-\varphi_0}(1 + \varphi_1) = 0;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\varphi_1 = \frac{\cos(\varphi_0 - \theta - \theta')\, e^{-\varphi_0} - \cos(\theta + \theta')}{\sin(\theta + \theta') - \cos(\varphi_0 - \theta - \theta')\, e^{-\varphi_0}},$$

ou, en tenant compte des valeurs de θ, θ' et φ_0,

$$\varphi_1 = 0{,}045\,56 = 2^\circ 36', 7.$$

Revenons maintenant aux paragraphes II, III et IV lorsque le rayon r de la bille n'est pas négligeable.

D'abord, si les corps sont parfaitement polis, le centre de gravité de la sphère décrit un cercle de rayon $\rho - r$ et son mouvement est celui d'un pendule de longueur $\rho - r$; on a par suite

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2g}{\rho - r}(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

la sphère se transportant parallèlement à elle-même.

Si la bille roule sans glisser, le travail de l'adhérence étant nul, le théorème des forces vives donne la

relation

$$m(\rho - r)\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2}{5}mr^2\Omega^2 = 2(\rho - r)mg(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Mais si nous comptons Ω, comme φ, positivement de droite à gauche, on a pour exprimer le roulement sans glissement

$$(\rho - r)\frac{d\varphi}{dt} + r\Omega = 0,$$

et l'équation des forces vives devient par suite

$$(1)\qquad \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{5}{7}\,\frac{2g}{\rho - r}(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Le mouvement du centre de la sphère est donc celui d'un pendule de longueur égale à

$$\frac{7}{5}(\rho - r).$$

Pour que le roulement ait lieu sans glissement, il faut que l'adhérence soit suffisante. Si l'on désigne par F cette adhérence, le mouvement de la sphère autour de son centre de gravité donne

$$\frac{2}{5}mr^2\frac{d\Omega}{dt} = \mathrm{F}r,$$

d'où

$$\mathrm{F} = \frac{2}{5}mr\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2}{5}m(\rho - r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

D'ailleurs, N étant la pression de la sphère, on a

$$\mathrm{F} = \mathrm{N}f', \qquad \text{avec} \qquad f' \overline{=} f.$$

Mais le mouvement du centre de gravité de la sphère donne

$$\mathrm{N} = (\rho - r)m\frac{d\varphi^2}{dt^2} + mg\cos\varphi,$$

et l'on déduit de (4)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{5}{7}\frac{g}{\rho - r}\sin\varphi.$$

On a donc

$$\frac{2}{7}g\sin\varphi = f'\left[g\cos\varphi + \frac{10}{7}g(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\right],$$

d'où

$$f' = \frac{2\sin\varphi}{17\cos\varphi - 10\cos\varphi_0},$$

et la condition pour qu'il y ait roulement sans glissement

$$f' \leqq f$$

donne

$$\frac{2\sin\varphi}{17\cos\varphi - 10\cos\varphi_0} \leqq f.$$

D'ailleurs, si cette condition est remplie à l'instant initial, elle le sera pendant toute la suite du mouvement, puisque le premier membre de cette inégalité décroît constamment avec φ.

On a donc, pour que le roulement ait lieu sans glissement pendant toute la suite du mouvement.

$$f \leqq \frac{2}{7}\operatorname{tang}\varphi_0.$$

Dans les cas du paragraphe VII, comme pour $\varphi_0 = 60°$,

$$\frac{2}{7}\operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{2\sqrt{3}}{7} = 0,49487 < \frac{1}{2},$$

le roulement aurait toujours lieu sans glissement.

On a dans ce cas

$$w^2 = (\rho - r)^2\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{10}{7}g(\rho - r)(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

$$\Omega^2 = \left(\frac{\rho - r}{r}\right)^2\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{10}{7}g\frac{(\rho - r)}{r^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Nous avons d'ailleurs, en nous reportant à la relation (2),

$$v^2 = \rho^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2g\rho \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \times [\cos(\varphi - \theta - \theta') - \cos(\varphi_0 - \theta - \theta')\, e^{-2f(\varphi_0 - \varphi)}].$$

Si l'on considère une position de A très voisine de A_0, en posant $\varphi = \varphi_0 - \varepsilon$ et négligeant les termes en ε^2, on aura

$$v^2 = 2g\rho \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \varepsilon [\sin(\varphi_0 - \theta - \theta') + 2f\cos(\varphi_0 - \theta - \theta')],$$

ou, comme $\tang\theta' = 2f$,

$$v^2 = \frac{2g\rho}{\cos\theta} \varepsilon \sin(\varphi_0 - \theta).$$

On a d'autre part dans les mêmes conditions

$$w^2 = \frac{10}{7}(\rho - r) g \varepsilon \sin\varphi_0,$$

d'où

$$\frac{w^2}{v^2} = \frac{5}{7} \frac{\rho - r}{\rho} \frac{\sin\varphi_0 \cos\theta}{\sin(\varphi_0 - \theta)}.$$

Lorsque r tend vers zéro, ce rapport ne tend pas vers l'unité, même si $\theta = 0$. Cela tient à ce que, lorsque r tend vers zéro, la force vive de la sphère autour de son centre, égale à

$$\frac{2}{5} m r^2 \Omega^2 = \frac{2}{5} m (\rho - r)^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2},$$

ne tend pas vers zéro.

La force vive totale de la sphère est toujours égale à $\frac{7}{5} m(\rho - r)^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2}$, tandis que, pour la sphère assimilée

à un point matériel, elle est $m\rho^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2}$, et ces deux quantités ne deviennent pas égales pour $r = 0$.

Remarque. — Dans le cas où la sphère roule et glisse en même temps, on peut encore obtenir une intégrale première pour le mouvement de son centre de gravité.

On a en effet, en désignant par F la force de frottement,

$$m\frac{dv}{dt} = -m(\rho - r)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = mg\sin\varphi - \mathrm{F},$$

$$(5) \qquad \mathrm{N} = m(\rho - r)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + mg\cos\varphi.$$

D'ailleurs, puisque l'on suppose qu'il y a glissement,

$$\mathrm{F} = \mathrm{N}f,$$

et par suite

$$(6) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - f\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{g}{\rho - r}(\sin\varphi - f\cos\varphi) = 0,$$

ou, en posant $f = \operatorname{tang}\theta$, $\psi = \varphi - \theta$,

$$(7) \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} - f\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{(\rho - r)\cos\theta}\sin\psi = 0,$$

ce qui est l'équation (1) où $l = (\rho - r)\cos\theta$.

(¹) On doit remarquer d'ailleurs que pour qu'il y ait, pendant toute la durée du mouvement, roulement sans glissement, il faut

$$\operatorname{tang}\varphi_0 \leq \frac{7}{2}\operatorname{tang}\theta\,;$$

on ne peut donc pas, dans cette hypothèse, faire $\theta = 0$.

Pour qu'il y ait glissement, il faut que l'on ait

$$r\Omega < -(\rho - r)\frac{d\varphi}{dt},$$

ou, en différentiant,

$$(8)\qquad r\frac{d\Omega}{dt} < -(\rho - r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

D'ailleurs le mouvement de la sphère autour de son centre de gravité donne

$$(9)\qquad \frac{2}{5}mr\frac{d\Omega}{dt} = \mathrm{F} = \mathrm{N}f.$$

En tenant par suite compte de (5), (6) et (9), l'inégalité donne

$$f\left[(\rho - r)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + g\cos\varphi\right]$$
$$< \frac{2}{5}\left[g\sin\varphi - gf\cos\varphi - (\rho - r)f\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right]$$

ou

$$(10)\qquad \frac{7}{5}f\left[(\rho - r)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + g\cos\varphi\right] < \frac{2}{5}g\sin\varphi.$$

Mais la valeur de $\frac{d\varphi^2}{dt^2}$ se déduit de la relation (3) où l'on remplacera ρ par $\rho - r$: on a donc

$$(11)\qquad \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2g\cos\theta'}{(\rho - r)\cos\theta}$$
$$\times[\cos(\varphi - \theta - \theta')$$
$$- \cos(\varphi_0 - \theta - \theta')e^{-2f(\varphi_0-\varphi)}],$$

de sorte que la condition (10) devient en fin de compte

$$(12)\qquad f\left\{\cos\varphi + \frac{2\cos\theta'}{\cos\theta}[\cos(\varphi - \theta - \theta')\right.$$
$$\left. + \cos(\varphi_0 - \theta - \theta')e^{-2f(\varphi_0-\varphi)}]\right\}$$
$$< \frac{2}{7}\sin\varphi.$$

Pour que cette condition soit remplie au début, il faut que

$$f < \frac{2}{7} \operatorname{tang} \varphi_0,$$

condition inverse, ainsi que cela devait être, de celle qui exprime qu'il y a roulement sans glissement au début.

On remarquera que si le point A passe par la verticale, la condition (12) ne peut jamais être remplie à ce moment où $\varphi = 0$.

Pour r égal à zéro, l'équation (7) coïncide avec l'équation (3).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2331.

(1917, p. 437.)

Par un point O *commun à deux cercles orthogonaux, on mène une droite variable qui coupe ces deux cercles en* A *et* B. *Démontrer que le lieu du point conjugué harmonique de* O *par rapport à* AB *est une strophoïde.*

(J. Lemaire.)

Solution

Par M. L. Maloue.

On reconnaît immédiatement que le lieu est une cubique unicursale C, ayant en O un point double où les tangentes sont les tangentes aux deux cercles, tangentes rectangulaires par hypothèse. Pour que le point M, conjugué de O par rapport à A et B soit rejeté à l'infini, il faut, ou bien que O

soit le milieu de AB, ce qui ne se produit que pour une seule direction de OM, ou bien que les points A et B soient rejetés tous les deux à l'infini, ce qui exige que OM soit une droite isotrope. On trouve bien pour C toutes les propriétés qui caractérisent une strophoïde.

2333.

(1917, p. 157.)

Par les sommets d'un triangle, l'orthocentre et les pieds des hauteurs passent une infinité de cubiques circulaires : démontrer que le point commun à la courbe et à son asymptote réelle et le foyer singulier sont deux points diamétralement opposés sur le cercle des neuf points du triangle. (J. Lemaire.)

Solution

Par M. R. B.

Soient A, B, C les sommets du triangle, H son orthocentre, α, β, γ les pieds des hauteurs, I et J les points cycliques. On trouve immédiatement des cubiques dégénérées passant par ces neuf points : par exemple celle qui se compose du cercle $B\gamma\beta C$ et de la droite $AH\alpha$, celle qui se compose du cercle $C\alpha\gamma A$ et de la droite $BH\beta$ (il y a en tout six cubiques dégénérées analogues). Ces deux cubiques déterminent un faisceau ayant pour base les neuf points dont il s'agit.

Une cubique G du faisceau sera déterminée si l'on donne sa tangente en I. La tangente en J est alors déterminée d'une façon unique, et réciproquement. Ces deux tangentes se rencontrent au foyer singulier F de la courbe qui décrit par conséquent une conique passant en I et J, c'est-à-dire un cercle. Ce cercle passe par les foyers singuliers des cubiques dégénérées envisagées plus haut, c'est-à-dire par les centres des cercles tels que $B\gamma\beta C$, c'est-à-dire encore par les milieux des segments tels que BC. On voit bien que F décrit le cercle des neuf points Γ du triangle ABC.

Il est maintenant commode d'introduire des arguments elliptiques. Supposons exprimées les coordonnées d'un point de G en fonctions elliptiques d'un paramètre; soient $2\omega_1$, $2\omega_2$ et $2\omega_3$ les périodes communes des fonctions intro-

duites ($\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$), et supposons la représentation telle que les arguments u, v, w de trois points en ligne droite satisfassent à la condition

$$u + v + w = 0 \text{ (à une période près).}$$

Si l'on désigne par les mêmes lettres les points et les paramètres correspondants, on devra avoir, à des périodes près,

$$B + C + \alpha = 0, \qquad C + A + \beta = 0, \qquad A + C + \gamma = 0,$$
$$A + H + \alpha = 0, \qquad B + H + \beta = 0, \qquad C + H + \gamma = 0,$$

d'où, par élimination de H, α, β et γ,

$$B + C - A = C + A - B = A + B - C$$

et enfin

$$A \equiv B \equiv C,$$

ces congruences ayant lieu à des demi-périodes près. On trouve finalement que l'on satisfait à toutes les conditions écrites en posant, H ayant une valeur quelconque,

$$A = H + \omega_1, \qquad B = H + \omega_2, \qquad C = H + \omega_3,$$
$$\alpha = -2H + \omega_1, \qquad \beta = -2H + \omega_2, \qquad \gamma = -2H + \omega^3.$$

Quant à I et J, ils doivent satisfaire à la relation suivante, exprimant que les neuf points A, B, C, H, α, β, γ, I, J sont les bases d'un faisceau de cubiques,

$$A + B + C + H + \alpha + \beta + \gamma + I + J = 0,$$

ce qui se réduit à

$$I + J = 2H.$$

On tire de là diverses conséquences.

1° Soit M le point à l'infini réel de la cubique. On a

$$M + I + J = 0, \qquad \text{ou} \qquad M = -2H,$$

et l'on en conclut que le point M appartient à la tangente à G en l'un quelconque des points A, B, C, H. Autrement dit, *ces*

tangentes sont toutes les quatre parallèles à l'asymptote réelle de la cubique.

2° Soit P le point où cette asymptote réelle, c'est-à-dire la tangente en M, rencontre G. On a

$$P = -2M = 4H - -2\alpha = -2\beta = -2\gamma.$$

Donc *le point* P *appartient à la tangente à* G *en chacun des points* α, β, γ.

3° On voit encore que l'on a

$$P + \alpha + \beta + \gamma + I + J = 0,$$

car cela se réduit à

$$4H - 6H + 2H = 0.$$

Le point P *est donc sur la conique* $\alpha\beta\gamma IJ$, *c'est-à-dire sur le cercle des neuf points* Γ, comme il est indiqué dans l'énoncé.

Reste à démontrer la relation remarquable signalée entre les points P et F. Or la connaissance de P sur Γ détermine G et par suite F d'une façon unique. De même F détermine G. Il y a donc entre ces deux points une correspondance homographique sur Γ. Or si F vient au milieu de BC, G dégénère, comme on l'a vu, en le cercle $B\gamma\beta C$ et en la droite $AH\alpha$, et P devient le point de rencontre de AH avec la tangente en γ ou β au cercle $B\gamma\beta C$. Ce point est le milieu de AH, comme on le reconnaît tout de suite, c'est-à-dire le point diamétralement opposé à F sur Γ. On trouve de même comme points correspondants de l'homographie le milieu de CA et le milieu de BH, le milieu de AB et le milieu de CH, soit encore des couples de points diamétralement opposés sur Γ. L'homographie envisagée se confond donc nécessairement avec celle qui résulte de la conjugaison des points diamétralement opposés sur Γ, ce qui démontre la dernière partie de l'énoncé.

2335.

(1917, p. 437.)

Démontrer que si une sphère variable passe en quatre points fixes d'une biquadratique gauche qui sont situés

dans un même plan, les quatre autres points communs à la sphère et à cette courbe sont dans un même plan de direction fixe. (J. Lemaire.)

Solution

Par M. L. Maloue.

Soient P et Q deux quadriques passant par la biquadratique gauche donnée B, S la sphère variable, A le plan qui contient les quatre points fixes. P, Q, S se coupent en huit points formant un système de Lamé. Quatre de ces points étant dans le plan A, les quatre autres sont dans un plan B. Les ∞^2 quadriques qui passent par les huit points forment un réseau ponctuel, et il en est de même des coniques, traces de ces quadriques sur un plan quelconque. Si donc p, q, s, a, b sont les coniques ou droites à l'infini respectivement de P. Q, S, A, B (S est l'ombicale), a et b constituent dans leur ensemble une des coniques réduites à deux droites du réseau ponctuel déterminé par P, Q, S. Quand la sphère varie dans les conditions de l'énoncé, p, q, s et a restent fixes. Il en est donc de même de b, ce qui démontre le théorème.

2336.

(1917), p. 438.)

Soient α, β, γ, δ *quatre tangentes d'une hypocycloïde à trois rebroussements*, P *le point commun aux deux premières*, Q *le point commun aux deux autres : démontrer que le foyer de la parabole tangente aux quatre droites est symétrique, par rapport au milieu de* PQ, *du point commun aux troisièmes tangentes à l'hypocycloïde issues de* P *et de* Q. (J. Lemaire.)

2337.

(1917, p. 438.)

Si l'on joint le foyer d'une parabole aux six sommets d'un quadrilatère circonscrit, la parallèle menée par chaque sommet à la droite joignant le foyer au sommet opposé touche l'hypocycloïde à trois rebroussements inscrite au quadrilatère. (J. Lemaire.)

2338.

(1917, p. 438.)

Si un quadrilatère est circonscrit à une hypocycloïde à trois rebroussements, les troisièmes tangentes à cette courbe issues de chacun des couples de sommets opposés se coupent sur une même tangente qui est parallèle à l'axe de la parabole inscrite au quadrilatère.

(J. Lemaire.)

Solutions

Par M. R. B.

Toutes ces propositions peuvent être rattachées à une même propriété des cubiques nodales, que nous établirons tout d'abord.

Toutes les cubiques ayant un point double donné O dépendent linéairement de six paramètres. Celles qui passent par cinq points donnés A, B, C, D, E forment un faisceau, et l'on reconnaît immédiatement que leurs tangentes au point double O sont conjuguées dans une involution.

Supposons en particulier que les points A B, C soient en ligne droite. Soit G la conique qui passe par les cinq points A, B, D, E, O. Si les tangentes au point double O à l'une quelconque des cubiques du faisceau rencontrent G aux points M et N, il résulte de ce qui vient d'être dit que MN passe par un point fixe quand la cubique varie.

Or, parmi ces cubiques, il en est une qui se compose des trois droites ABC, OD, OE. Pour cette cubique, MN se confond avec DE. Une autre cubique se compose de la conique G et de la droite OC. Pour cette seconde cubique, MN se confond avec OC. Le point fixe par lequel passe MN est donc le point de rencontre de OC avec DE.

On peut énoncer comme il suit le résultat obtenul : Soient Γ *une cubique ayant un point double en* O, A, B, C, D *les quatre points autres que* O *où la rencontre une conique* G *passant en* O, M *et* N *les points où les tangentes à* Γ *en* O *rencontrent* G. *Le point* O, *le point de rencontre de* MN *avec* DE *et le troisième point* C *où* AB *rencontre* Γ *sont en ligne droite.*

Énonçons maintenant la propriété corrélative, en supposant qu'au point O corresponde la droite de l'infini, aux droites OM et ON les points cycliques. Γ devient une courbe de troisième classe ayant pour bitangente la droite de l'infini avec les points cycliques pour point de contact c'est-à-dire une H_3 (hypocycloïde à trois rebroussements). G devient une parabole, MN le foyer de cette parabole, A, B, D, E, les quatre tangentes communes à Γ et à G, C la troisième tangente issue à Γ du point de rencontre de A et B. Le point de rencontre de MN avec DE devient la droite qui joint le foyer de G au point de rencontre de D et E. Ces deux droites et la droite O doivent concourir, c'est-à-dire que les deux premières sont parallèles. On aboutit donc à ceci :

Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à la fois à une parabole et à une H_3, *la troisième tangente à la* H_3 *issue d'un sommet de ce quadrilatère et la droite qui joint le sommet opposé au foyer de la parabole sont parallèles.*

C'est la proposition 2337.

Adoptons maintenant les notations de l'énoncé 2336. Soit F le foyer de la parabole. FP, d'après ce qu'on vient de voir, est parallèle à la troisième tangente issue de Q ; FQ est parallèle à la troisième tangente issue de P. La proposition énoncée en résulte immédiatement.

Les tangentes en P et Q et les deux autres couples de tangentes analogues se coupent sur une droite Δ qui passe par les symétriques de F par rapport au milieu des diagonales du quadrilatère et qui est par conséquent parallèle à la droite qui joint ces milieux. Or cette dernière droite, lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère, contient le centre de la parabole, rejeté à l'infini dans la direction de son axe. Δ est donc parallèle à cet axe, ce qui démontre partiellement la proposition 2338.

Pour achever la démonstration, il faut établir que Δ touche la H_3. Or c'est là une propriété générale des courbes de troisième classe. Établissons la propriété corrélative pour les courbes de troisième ordre.

Soient A, B, C, D quatre points d'une courbe de troisième ordre Γ ; (AB), (CD), ... les troisièmes points où AB, CD, ... rencontrent Γ ; je dis *que les trois droites* (AB)(CD), (AC)(BD), (AD)(BC) *rencontrent* Γ *en un même point.*

Supposons, pour nous placer dans le cas le plus général, que Γ soit de genre *un*, et introduisons des arguments elliptiques, tellement choisis que la somme des arguments de trois points en ligne droite soit nulle.

Désignons les points et leurs arguments par les mêmes lettres. On aura

$$(AB) = -A - B, \qquad (CD) = -C - D.$$

Si P est le troisième point où (AB)(CD) rencontre Γ, on a

$$P = -(AB) - (CD) = A + B + C + D.$$

On voit, à cause de la symétrie de l'expression de P, que les droites (AC)(BD) et (AD)(BC) passent aussi par le point P, ce qui démontre la proposition.

Si Γ est unicursale, on fera une démonstration semblable en introduisant le paramètre en fonction duquel s'expriment rationnellement les coordonnées d'un point de Γ.

2339.

1917, p. 438.

Si cinq droites α, β, γ, δ, ε touchent une hypocycloïde à trois rebroussements, les axes des cinq paraboles tangentes respectivement à quatre de ces droites forment un pentagone qui a ses angles égaux à ceux du pentagone formé par les cinq droites. (J. Lemaire.)

Solution.

Par M. R. B.

Je m'appuierai sur ce théorème de M. G. Humbert : *L'orientation du système des trois tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque à une hypocycloïde à trois rebroussements* (c'est-à-dire la somme des angles, définie à π près, que font ces trois tangentes avec un axe fixe) *est constante* (1).

(1) *Voir* le Mémoire de M. J. Lemaire, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*N. A.* 1913, p. 54)

On peut choisir l'axe fixe de telle manière que cette orientation soit nulle.

Dans ce qui suit je désignerai par [X] l'orientation d'une droite X.

Soient alors F_α le foyer de la parabole P_α, qui touche les quatre droites β, γ, δ, ε, et X_α son axe. La droite qui joint le point de rencontre $(\delta\varepsilon)$ des droites δ et ε au point F_α et la droite X_α sont, en vertu du théorème de Porcelet appliqué à la parabole, également inclinées sur les droites δ et ε. Cela revient à dire que les deux systèmes de droites $(\delta\varepsilon)$ F_α et X_α, δ et ε ont même orientation :

$$[(\delta\varepsilon)F_\alpha] + [X_\alpha] = [\delta] + [\varepsilon].$$

D'autre part on sait (*voir* la question 2337) que $(\delta\varepsilon)$ F_α est parallèle à la troisième tangente issue du point $(\beta\gamma)$ à l'hypocycloïde. On a donc, en vertu du théorème de M. Humbert,

$$[(\delta\varepsilon)F_\alpha] + [\beta] + [\gamma] = 0.$$

On tire de ces deux relations

$$[X_\alpha] = [\beta] + [\gamma] + [\delta] + [\varepsilon].$$

De cette relation et des relations analogues on tire

$$[X_\alpha] + [\alpha] = [X_\beta] + [\beta] = \ldots = [X_\varepsilon] + [\varepsilon].$$

Les droites X_α, X_β, ... d'une part et les droites α, β, ... de l'autre sont donc également inclinées, en sens contraires, sur une même droite, ce qui établit la proposition,

2341.

(1917, p. 438.)

Si quatre tangentes d'une hypocycloïde à trois rebroussements forment un quadrilatère inscriptible dans un cercle, la troisième diagonale touche la courbe en un point M; *démontrer que le foyer de la parabole tangente aux quatre droites est sur la troisième diagonale, et que cette diagonale* et FM *ont le même milieu.*

(J. Lemaire.)

SOLUTION.

Par M. R. B.

Soient ABCD un quadrilatère inscriptible, E le point de rencontre de AB et de CD, G le point de rencontre de AC et de BD. On reconnaît aisément, par des considérations d'angles, que les cercles ACE et DCG, par exemple se coupent en un point F de EG. F est le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère.

D'après la propriété qui fait l'objet de la question 2337, la troisième tangente issue de E à l'hypocycloïde est parallèle à FG, et la troisième tangente issue de G est parallèle à FE. Ces deux tangentes se confondent donc avec EG. Leur point de rencontre doit être considéré comme le point de contact M, et la figure FGME formant un parallélogramme, la proposition est démontrée (pour abréger, on esquisse un raisonnement que l'on rendrait rigoureux en considérant d'abord la parabole et l'hypocycloïde inscrite au quadrilatère qui dérive du quadrilatère considéré en faisant un peu tourner le côté ECD autour du point E, et en passant à la limite).

[A3aα]

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

Par M. Léon POMEY,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

Toute équation algébrique entière $f(z) = 0$ de degré n a n racines.

Démonstration. — On sait qu'il existe, dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, une circonférence ayant son centre à l'origine, de rayon fini mais assez grand pour que, à l'intérieur de cette circonférence ou sur elle, $|f(z)|$ soit supérieur à un nombre positif choisi arbitrairement N. Quand z ne sort pas de ce cercle, $|f(z)|$ étant une fonction continue de x et y dans ce domaine borné et complet admet un minimum m ($m < N$) et l'atteint effectivement en un point déterminé a (évidemment intérieur au cercle).

Cela posé, le théorème étant vrai pour le degré 1, il sera démontré d'une manière générale si, le supposant vrai pour le degré $n - 1$, on prouve qu'il l'est encore pour le degré n. *Et il suffit pour cela de démontrer que, dans cette hypothèse, le minimum de $|f(z)|$ est nécessairement nul :* dans ce cas, en effet, $f(z)$ s'annulera pour $z = a$, et en divisant $f(z)$ par $z - a$, on retombera sur une équation de degré $n - 1$.

Or supposons m ou $|f(a)| > 0$. Le quotient de

$f(z)-f(a)$ par $z-a$ étant de degré $n-1$ a par hypothèse $n-1$ zéros : $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Donc $f(z)-f(a)=0$ possède n racines : $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Soient a_p l'une quelconque d'entre elles et λ son ordre de multiplicité. On a

$$f(a_p)=f(a) \text{ et } |f(a_p)|=|f(a)|=m.$$

Il est évident *a priori* qu'on peut (par simple calcul d'identification) déterminer des coefficients $c_\lambda, \ldots, c_n$ [$c_\lambda \neq 0$, et c_n étant le coefficient de z_n dans $f(z)$] de façon que

$$(1) \quad f(z)=f(a_p)+c_\lambda(z-a_p)^\lambda+\ldots+c_n(z-a_p)^n.$$

Mettons en évidence les parties réelle et imaginaire des divers éléments de (1) en posant :

$$f(z)=\mathrm{P}+i\mathrm{Q}, \quad a_p=\alpha+i\beta, \quad f(a_p)=f(a)=\mathrm{P}_0+i\mathrm{Q}_0.$$
$$c^\lambda=\mathrm{A}_\lambda+i\mathrm{B}_\lambda, \ldots, \qquad c_n=\mathrm{A}_n+i\mathrm{B}_n.$$
$$(z-a_p)^\lambda=[x-\alpha+i(y-\beta)]^\lambda$$
$$=\mathrm{P}_\lambda+i\mathrm{Q}_\lambda, \ldots, (z-a_p)^n=\mathrm{P}_n+i\mathrm{Q}_n.$$

P et Q sont deux polynomes de degré n en x et y; $(\mathrm{P}_\lambda, \mathrm{Q}_\lambda), \ldots, (\mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n)$ des polynomes homogènes de degré $\lambda, \ldots, n$ en $x-\alpha$ et $y-\beta$; enfin P_0, Q_0, A_λ, B_λ, ..., A_n, B_n des constantes. Dans ces conditions, (1) devient

$$(2) \quad \mathrm{P}+i\mathrm{Q}=\mathrm{P}_0+i\mathrm{Q}+(\mathrm{A}_\lambda+i\mathrm{B}_\lambda)(\mathrm{P}_\lambda+i\mathrm{Q}_\lambda)+\ldots$$
$$+(\mathrm{A}_n+i\mathrm{B}_n)(\mathrm{P}_n+i\mathrm{Q}_n).$$

Changeons i en $-i$ et multiplions membre à membre l'égalité ainsi obtenue avec la précédente : il vient

$$(3) \quad \mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2=\mathrm{P}_0^2+\mathrm{Q}_0^2+2(\mathrm{A}_\lambda\mathrm{P}_0+\mathrm{B}_\lambda\mathrm{Q}_0)\mathrm{P}_\lambda$$
$$+2(\mathrm{A}_\lambda\mathrm{Q}_0-\mathrm{B}_\lambda\mathrm{P}_0)\mathrm{Q}_\lambda+\ldots.$$

Il est visible que tous les termes non écrits sont de degré plus grand que λ par rapport à $x-\alpha$ et $y-\beta$: d'autre part $A_\lambda P_0 + B_\lambda Q_0$ et $A_\lambda Q_0 - B_\lambda P_0$ ne sont pas nuls ensemble, puisque $A_\lambda^2 + B_\lambda^2$, c'est-à-dire c_λ^2 est différent de zéro, ainsi que $P_0^2 + Q_0^2 = |f(a)|^2$: il résulte de là que, *dans le développement de* $P^2 + Q^2 - (P_0^2 + Q_0^2)$ *ou de* $|f(z)|^2 - m^2$, *les termes du degré minimum en* $x-\alpha$ *et* $y-\beta$ *sont de degré* λ (*voir* Note I).

Faisons varier maintenant z au voisinage de a, mais de façon que $\dfrac{x-\alpha}{y-\beta}$ conserve une valeur finie arbitraire t : (3) peut s'écrire alors

$$(4)\quad \begin{aligned} &|f(z)|^2 - m^2 \\ &= (y-\beta)^\lambda [D_\lambda + (y-\beta) D_{\lambda-1} + \ldots + D_n (y-\beta)^{n-\lambda}], \end{aligned}$$

les constantes $D_\lambda, \ldots, D_n$ étant des polynomes en t ($D_\lambda \gtrless 0$). On peut supposer en outre les modules de $x-\alpha$ et $y-\beta$ suffisamment petits pour que $|f(z)|^2$ reste supérieur à m^2, et pour qu'en même temps D_λ soit supérieur en module à la somme des termes qui le suivent à l'intérieur du crochet, au second membre de (4) ; le signe du second membre de (4) est alors celui de $D_\lambda (y-\beta)_\lambda$: il doit rester invariable comme celui du premier membre, même si $y-\beta$ change de signe ; il faut donc que λ soit pair.

Ainsi toute racine a_p *de* $f(z) - f(a) = 0$ *est multiple d'ordre pair* (*voir* Note II). Mais cela est manifestement impossible dans le cas où n est impair. Et dans le cas de n pair, la théorie de la division permet d'écrire (en appelant $2\lambda_0, 2\lambda_p, \ldots, 2\lambda_h$) les ordres de multiplicité des racines distinctes $a, a_p, \ldots a_h$

$$f(z) - f(a) = c_n (z-a)^{2\lambda_0} (z-a_p)^{2\lambda_p} \ldots (z-a_h)^{2\lambda_h};$$

le second membre est le carré d'un polynome $g(z)$ de degré $\frac{n}{2}$; d'où

$$(5)\qquad f(z) = g^2(z) + f(a) = \left[g(z) + i\sqrt{f(a)}\right]\left[g(z) - i\sqrt{f(a)}\right];$$

$f(z)$ admettrait donc les $\frac{n}{2}$ racines de chacun des deux facteurs ainsi mis en évidence, et le minimum de $|f(z)|$ serait nul, contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, de toutes façons, l'hypothèse faite conduit à une impossibilité. Donc il est bien nécessaire que m soit nul. C. Q. F. D

Note I. — La présente démonstration du théorème de d'Alembert (dans laquelle il n'est pas fait usage de représentation trigonométrique des imaginaires) perfectionne, en la simplifiant notablement, une autre analyse publiée dans cette Revue en mars 1916. Dans cette dernière, le résultat auquel on vient d'aboutir ci-dessus était obtenu, à la page 103, comme conséquence du fait que $f(z)$ est une fonction synectique, et en utilisant la formule de Taylor pour le développement (1) (alors qu'ici la forme même des c_i n'est pas intervenue, mais seulement la possibilité, évidente *a priori*, d'effectuer ce développement). *C'est à M. Egan (de Dublin) qu'est due la remarque* qu'on peut éviter les considérations sur les fonctions synectiques.

Note. II — Tout ceci s'étend immédiatement à toute fonction analytique $f(z)$. D'où ce théorème : *Si le module d'une fonction analytique $f(z)$ atteint en un point a un minimum $|f(a)|$ non nul, $f(z) - f(a)$ et $|f(z)|^2 - |f(a)|^2$ ont le même ordre au point a, et par suite a est une racine multiple d'ordre pair pour $f(z) - f(a)$.*

[K¹7a]

SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE;

PAR M. AURIC.

Dans ses remarquables *Principes de Géométrie analytique*, Darboux n'a pas hésité à consacrer un Chapitre entier (p. 33 à 51) à l'étude détaillée du rapport anharmonique, voulant montrer par là l'importance du rôle que cette notion fondamentale était appelée à jouer en Mathématiques.

Considérons, avec Darboux, le cas général où α, β, γ, δ sont des quantités quelconques, réelles ou imaginaires, et posons

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta} : \frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}.$$

On démontre aisément que, par la permutation des éléments, R peut prendre 24 valeurs, égales entre elles par groupes de quatre : si λ est la valeur commune à un groupe, les autres valeurs de R sont :

$$\frac{1}{\lambda}, \quad 1-\lambda, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}, \quad 1-\frac{1}{\lambda}.$$

On voit également que R est bien déterminé, sauf dans l'hypothèse où trois éléments coïncident.

Les six valeurs de R se réduisent à un nombre moindre dans les cas suivants :

1° Deux éléments coïncident, ce qui donne pour les valeurs de R

$$0, \quad 1, \quad \infty;$$

2° Les éléments forment une relation *harmonique*,

auquel cas les valeurs sont

$$-1, \quad \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2;$$

3° Les éléments forment une relation *équianharmonique*, ce qui donne les valeurs

$$-\theta, \quad -\theta^2;$$

θ, θ^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité positive.

Représentons, comme d'habitude, les éléments $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$: il est clair qu'on aura

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}},$$

d'où, en faisant ressortir le module et l'argument par la considération des côtés et des angles,

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left| \frac{CA.DB}{DA.CB} \right| e^{i(\widehat{CAD} - \widehat{CBD})}.$$

Examinons d'abord le cas où les éléments forment une relation harmonique : les valeurs de R étant

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2,$$

il en résulte immédiatement que les angles $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBD}$ sont égaux ou supplémentaires ; en d'autres termes, le quadrilatère ABCD est inscriptible.

Admettons que CAD et CBD soient supplémentaires ; on aura

$$\left| \frac{CA.DB}{DA.CB} \right| = 1,$$

ce qui signifie que les produits des côtés opposés sont égaux : d'où il résulte du théorème de Ptolémée

que le quadrilatère est harmonique avec

$$CA.DB = DA.CB = \frac{1}{2} AB.CD.$$

On vérifie facilement que l'on a, dans cette hypothèse,

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = -1, \qquad R(\alpha, \gamma, \beta, \delta) = 2, \qquad R(\alpha\gamma, \delta, \beta) = \frac{1}{2}.$$

Si A, B, C sont donnés, on voit que D peut avoir trois positions qui sont les intersections de chacune des trois symédianes de ABC avec le cercle circonscrit à ce triangle.

Il est remarquable que le nom de *quadrilatère harmonique* ait été précisément employé pour désigner le cas où les éléments qu'il représente forment une relation harmonique.

Considérons le cas où les éléments forment une relation équianharmonique; les valeurs correspondantes de R

$$-\theta, \quad -\theta^2$$

ont pour module l'unité et pour arguments $\pm \frac{\pi}{6}$; il en résulte qu'on aura

$$CA.DB = AB.DC = BC.DA.$$

Dans le triangle ABC les distances de D aux sommets sont inversement proportionnelles aux côtés opposés : c'est la définition des deux centres isodynamiques, lesquels sont, comme on sait, inverses l'un de l'autre par rapport au cercle circonscrit à ABC.

On obtient également la relation

$$\widehat{ADB} - \widehat{ACB} = \pm \frac{\pi}{6}$$

qui se ramène à la propriété bien connue : le triangle podaire de D par rapport à ABC est équilatéral.

Lorsque A, B, C sont donnés, il y a deux solutions pour D et l'on devrait appeler *quadrilatères équianharmoniques* les figures ainsi obtenues ; si ABC devient un triangle équilatéral, D coïncide avec le centre de gravité, l'autre solution étant rejetée à l'infini.

On connaît la relation vectorielle qui a lieu pour quatre points quelconques du plan

$$\overline{AB}.\overline{DC}+\overline{BC}.\overline{DA}+\overline{CA}.\overline{DB}=0.$$

Si ces quatre points forment un quadrilatère équianharmonique, on a en outre la relation vectorielle

$$L=\overline{AB}^2.\overline{DC}^2+\overline{BC}^2.\overline{DA}^2+\overline{CA}^2.\overline{DB}^2=0$$

Appelons, avec Darboux,

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4b'x+a'=0$$

l'équation qui a pour racines α, β, γ, δ.

Posons également

$$M=\delta\,\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{DA}.\overline{DB}.\overline{DC},$$

$$N=[\overline{CA}.\overline{DB}+\overline{DA}.\overline{CB}][\overline{BA}.\overline{DC}+\overline{CA}.\overline{DB}]\times[\overline{DA}.\overline{CB}+\overline{BA}.\overline{BC}].$$

L'identité de Cauchy-Cayley devient

$$N^2+27M^2=\frac{1}{2}L^3$$

et l'on a, à un facteur près,

$$L=aa'-4bb'+3c^2,$$
$$N=aca'+2bcb'-ab'^2-a'b^2-c^3,$$

M représente le discriminant de l'équation et les relations

$$L=0, \qquad N=0,$$

ainsi qu'on l'a vu précédemment, correspondent aux cas où les racines forment entre elles une relation équianharmonique ou harmonique.

[M[1]3j][M[1]8b]

SUR LES COURBES A AXE ORTHOPTIQUE ET LES COURBES DE DIRECTION;

Par M. M. D'OCAGNE.

---

1. La transformée par tangentes orthogonales d'une courbe C par rapport à une droite D est l'enveloppe C' des perpendiculaires élevées aux tangentes de cette courbe C par leurs points de rencontre avec la droite D. Une telle transformation (déjà étudiée dans notre Ouvrage : *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 88) est évidemment réciproque.

Si la courbe C' coïncide avec C, la droite D constitue pour cette courbe un axe orthoptique.

Imaginons que nous prenions les bissectrices des angles que fait avec la droite D une tangente variable à une courbe quelconque Γ. Elles admettent, en général, une enveloppe unique C, pour laquelle, par conséquent, la droite D constitue un axe orthoptiqne. De là le moyen d'engendrer, de la manière la plus générale, des courbes pourvues d'un tel axe. Mais il peut se faire que l'enveloppe se décompose en deux courbes analytiquement distinctes correspondant chacune à une des deux bissectrices. Cette circonstance se produit lorsque la courbe Γ est de direction.

Inversement, si l'on considère deux courbes dis-

tinctes C et C', transformées l'une de l'autre par tangentes orthogonales, par rapport à une droite D, on voit que la droite symétrique de la droite D, à la fois par rapport à l'une et à l'autre des deux tangentes orthogonales, a pour enveloppe une courbe de direction : de là, un procédé entièrement général de génération des courbes de cette espèce.

Afin de simplifier le langage dans la suite de cette Note, nous exprimerons la relation ci-dessus définie entre les courbes C, ou C', et Γ en disant que C, ou C', est *bissectante* de Γ, et, inversement, que Γ est *antibissectante* de C, ou C', par rapport à la droite D.

Dans ces conditions, on peut résumer ce qui précède en disant que, *si la courbe* Γ *n'est pas de direction, sa bissectante* C *par rapport à une droite* D *quelconque, admet cette droite pour axe orthoptique.*

Inversement, *si la courbe* C *n'admet pas la droite* D *pour axe orthoptique, son antibissectante* Γ *par rapport à* D *est une courbe de direction.*

2. Pour l'étude analytique des problèmes que soulève une telle transformation, le système de coordonnées qui s'offre le plus naturellement à l'esprit est celui des coordonnées axiales, avec la droite D prise pour axe. Rappelons en quoi il consiste : O étant une origine marquée sur cette droite prise pour axe Ox, si une droite TM, coupant Ox en T, fait avec cet axe l'angle θ, et si $OT = \lambda$ (ce segment étant pris avec son signe), les coordonnées axiales de la droite TM sont λ et θ.

On peut également user du système, se ramenant immédiatement au précédent, qui est constitué par λ et $\mu = \tan g\theta$.

Nous avons donné dans les *Nouvelles Annales* (1884, p. 545, et 1901, p. 433) les formules fondamentales qui permettent l'étude directe des courbes planes au moyen de l'un ou de l'autre de ces deux systèmes.

En particulier, la détermination de la normale et du centre de courbure de la courbe, enveloppe de TM, définie par une équation donnée en λ et θ, résulte des formules suivantes (*loc. cit.*, 1884, p. 550 et 551) :

Si la perpendiculaire élevée en T à Ox coupe la normale en M au point I, on a

$$\mathrm{TI} = \frac{d\lambda}{d\theta}$$

(TI étant, bien entendu, compté positivement dans le sens obtenu en faisant tourner d'un angle droit, dans le sens direct, le sens positif de Ox), puis, si l'on appelle C le centre de courbure répondant au point M,

$$\mathrm{MC} = \frac{2d\lambda}{d\theta}\cos\theta + \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\sin\theta,$$

formule dont E. Cesaro a donné cette interprétation géométrique (*Nouvelles Annales*, 1885, p. 260) : que l'on prenne sur TI le point I_1 tel que $\mathrm{II}_1 = \mathrm{TI} = \frac{d\lambda}{d\theta}$, et, sur la parallèle à Ox menée par I, le point I_2 tel que $\mathrm{II}_2 = -\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$, alors *le quadrilatère* $\mathrm{I}_1\mathrm{II}_2\mathrm{C}$ *est inscrit dans un cercle, savoir celui qui a* $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$ pour *diamètre.*

De là, une facile construction pour le centre de courbure C d'une courbe définie en λ et θ; de là aussi un mode de liaison immédiat entre les normales et les centres de courbure de deux courbes transformées axiales l'une de l'autre, c'est-à-dire telles que leurs tangentes se coupant en un point T de Ox (c'est-à-dire

ayant même λ) fassent avec cet axe des angles θ et θ' liés par une relation telle que

$$F(\theta, \theta') = 0.$$

En effet, cette relation permet de déduire $\frac{d\lambda}{d\theta'}$, et $\frac{d^2\lambda}{d\theta'^2}$ de $\frac{d\lambda}{d\theta}$ et $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$, et, par suite, les points I', I'_1 et I'_2 des points I, I_1 et I_2. Or, ces derniers s'obtiennent bien facilement, lorsque l'on connaît le point M et le centre de courbure C, si l'on remarque que le point I est à la rencontre de MC et de la perpendiculaire en T à Ox, que le point I_1 est le symétrique de T par rapport à I, enfin que le point I_2 est à la rencontre du cercle circonscrit au triangle II_1C et de la parallèle à Ox menée par I. Ayant, comme il vient d'être dit, déduit des points ainsi construits les points I', I'_1, I'_2, on n'a plus qu'à abaisser du point I' la perpendiculaire sur la tangente à la seconde courbe pour avoir la normale $I'M'$ à cette courbe, puis à prendre l'intersection de cette normale avec le cercle de diamètre $I'_1 I'_2$ (qui la coupe une première fois en I') pour avoir le centre de courbure C' correspondant.

Si la courbe (M') est la bissectante de la courbe (M) par rapport à Ox, la relation entre θ et θ' s'écrit

$$\theta = 2\theta'.$$

Par suite, dans ce cas,

$$\frac{d\lambda}{d\theta'} = 2\frac{d\lambda}{d\theta}, \qquad \frac{d^2\lambda}{d\theta'^2} = 4\frac{d^2\lambda}{d\theta^2},$$

et l'on a

$$I'I'_1 = TI' = 2TI, \qquad I'I'_2 = 4II_2,$$

ce qui rend très simple la construction sus-indiquée.

3. Prenons un exemple d'application des coordonnées λ, θ.

Remarquons d'abord que si, sur OT, on construit un triangle isoscèle OST, et si le point S décrit la courbe qui, rapportée au pôle O et à l'axe Ox, a pour équation

$$\rho = f(\omega),$$

la droite ST a pour enveloppe la courbe dont l'équation axiale est, avec le même pôle et le même axe,

$$\lambda = -2f(\pi - \theta)\cos\theta.$$

Si la courbe (S) est le cercle de centre O et de rayon r, l'enveloppe de ST est l'hypocycloïde à quatre rebroussements $\mathcal{H}_4$, d'axes Ox et Oy, dont les points de rebroussement situés sur ces axes sont à la la distance $2r$ de O. Or, l'équation du cercle étant

$$\rho = r,$$

celle de la $\mathcal{H}_4$ est

$$\lambda = -2r\cos\theta.$$

Lorsqu'on transporte le pôle au point de rebroussement situé sur la partie positive de Ox, cette équation devient

$$(1) \qquad \lambda = -2r(1+\cos\theta) = -4r\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Si la courbe (S) est un cercle de rayon r tangent en O à Oy, par suite d'équation

$$\rho = 2r\cos\omega,$$

l'enveloppe de ST est l'hypocycloïde à trois rebroussements $\mathcal{H}_3$ ayant un sommet en O où elle est tangente à Oy et le point de rebroussement opposé sur Ox, avec l'abscisse $-4r$. Et, d'après ce qui précède, on voit que l'équation axiale de cette courbe est

$$(2) \qquad \lambda = -4r\cos^2\theta.$$

La comparaison des équations (1) et (2) montre que la $\mathcal{H}_3$ est bissectante de la $\mathcal{H}_4$ par rapport à Ox. Et comme le même résultat s'appliquerait à l'autre point de rebroussement de la $\mathcal{H}_4$ situé sur Ox, on voit que *la bissectante d'une $\mathcal{H}_4$ par rapport à un de ses axes de rebroussement se compose de deux $\mathcal{H}_3$ ayant respectivement un rebroussement confondu avec l'un de ceux de cette $\mathcal{H}_4$ situés sur Ox, le sommet opposé de cette $\mathcal{H}_3$ étant l'autre rebroussement de la $\mathcal{H}_4$ situé sur le même axe.*

C'est le théorème que nous avons proposé comme question dans les *Nouvelles Annales* sous le n° 2273 (1915, p. 531) et dont M. J. Lemaire a donné une démonstration purement géométrique (1918, p. 230).

Le fait que la bissectante de la $\mathcal{H}_4$ se décompose ainsi en deux $\mathcal{H}_3$ distinctes montre, ainsi qu'il est d'ailleurs bien connu, que la $\mathcal{H}_4$ est une courbe de direction.

4. Comme exemple d'application des coordonnées λ et μ, déterminons une courbe à axe orthoptique en prenant la bissectante d'une courbe non de direction.

Soit, par exemple, la parabole d'axe Oy et de paramètre p, tangente de O à Ox, dont, par suite, le foyer F, situé sur Oy, a pour ordonnée $OF = \frac{p}{2}$.

Le lieu des projections orthogonales de ce foyer sur les tangentes de la parabole n'étant autre que Ox, il en résulte que l'équation en λ et μ de la parabole est

$$\lambda = \frac{p\mu}{2}.$$

Or, puisque, pour la bissectante, on a

$$\theta = 2\theta',$$

il en résulte que

$$\mu = \frac{2\mu'}{1 - \mu'^2}.$$

Donc, en supprimant l'accent, on aura pour l'équation de la bissectante

$$\lambda = \frac{p\mu}{1 - \mu^2}$$

qui peut s'écrire

$$\lambda\mu^2 + p\mu - \lambda = 0.$$

Or, d'après ce qui a été établi dans la théorie générale des coordonnées λ, μ (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 434), si l'on multiplie cette équation par μ « de façon que chaque terme en μ soit d'un degré au moins égal à celui du polynome en λ qui le multiplie », ce qui donne

$$\lambda\mu^3 + p\mu^2 - \lambda\mu = 0,$$

on voit que cette équation, alors du troisième degré en μ, définit une *courbe de la troisième classe, tangente à* Ox, puisque μ s'y met en facteur (d'ailleurs évidemment en O, en raison de la symétrie), et *doublement tangente à la droite de l'infini*, puisque λ n'y entre qu'au premier degré, la courbe étant de la troisième classe.

En outre, d'après les formules (15) du Mémoire cité (p. 437), la courbe est définie en coordonnées ponctuelles par les équations

$$x = \frac{2p\mu}{(1 - \mu^2)^2}, \qquad y = \frac{p\mu^2(1 + \mu^2)}{(1 - \mu^2)^2},$$

qui montre que cette courbe est *unicursale*.

La substitution de ces valeurs dans une équation linéaire en x et y donnant une équation du quatrième degré en μ, on voit enfin que la courbe est *du quatrième ordre*.

Ceci montre que, pour cette courbe de genre zéro, les nombres de Plücker sont

$$m = 4, \qquad \delta = 0, \qquad \varkappa = 3,$$
$$n = 3, \qquad \tau = 1, \qquad \iota = 0.$$

Elle appartient à la dixième espèce des quartiques, d'après la nomenclature donnée par Salmon (*courbes planes;* traduction Chemin, p. 302).

Pour avoir l'équation cartésienne de cette courbe, l'élimination de μ entre les deux expressions ci-dessus de x et y, qui porterait sur des équations du quatrième degré en μ, serait assez compliquée. On peut ramener le problème à une forme plus simple en opérant comme suit :

La tangente de coordonnées λ, μ a pour équation cartésienne

$$y = \mu(x - \lambda)$$

ou, en remplaçant λ par la valeur correspondante à la quartique étudiée,

$$y = \mu\left(x - \frac{p\mu}{1 - \mu^2}\right)$$

qu'on peut écrire

$$x\mu^3 + (p - y)\mu^2 - x\mu + y = 0.$$

Il suffit, pour avoir l'enveloppe de cette droite, d'éliminer μ entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à μ, soit

$$3x\mu^2 + 2(p - y)\mu - x = 0.$$

L'élimination de μ^3 entre cette dernière multipliée par μ et la précédente donne immédiatement

$$(p - y)\mu^2 - 2x\mu + 3y = 0.$$

Entre les deux dernières équations écrites, toutes

deux du second degré en μ, l'élimination de ce paramètre, opérée par la formule classique, donne

$$x^2(p+8y)^2 = [2(p-y)^2+6x^2][2x^2+6y(p-y)]$$

qui peut encore s'écrire

$$4x^4-(8y^2+20py-p^2)x^2+4y(y-p)^3=0.$$

L'équation étant mise sous cette forme, on voit immédiatement que pour $x=0$, on a la racine triple $y=p$, ce qui donne un point de rebroussement confondu avec le centre de courbure répondant au sommet de la parabole antibissectante.

D'ailleurs, à l'origine, on a, pour la courbe elle-même, $y'=0$ (tangente confondue avec Ox comme on l'a déjà vu) et $y''=\frac{1}{2p}$, donc un rayon de courbure égal à $2p$, c'est-à-dire double de celui de la parabole au même point.

On voit aussi que les asymptotes, dont les directions sont celles des bissectrices des angles des axes coordonnés, sont tout entières rejetées à l'infini; la courbe est donc parabolique.

5. Nous ferons encore la remarque suivante : ainsi que nous l'avons établi précédemment (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 446), deux coniques ne peuvent être transformées par tangentes orthogonales l'une de l'autre relativement à une droite D, que si ce sont des paraboles de même foyer ayant leurs axes confondus ou rectangulaires; dans le premier cas, la droite D est leur corde commune; dans le second, elle est leur tangente commune. Si donc on prend l'antibissectante commune de l'un ou de l'autre de ces couples de paraboles, par rapport à la droite D, on trouve une courbe de direction.

Dans le premier cas, prenant la droite D pour axe Ox et l'axe commun des paraboles pour axe Oy, on arrive facilement à voir, par la méthode qui vient d'être indiquée, que *l'antibissectante est le cercle ayant pour centre le foyer commun des paraboles, et pour extrémités du diamètre dirigé suivant Oy, les symétriques de O par rapport aux sommets des deux paraboles.*

On pourra, à titre d'exercice, rechercher quelle est l'antibissectante dans le second cas (¹).

[L¹4a]

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES SUR UNE QUESTION DE CONCOURS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1919;

PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Il s'agit d'étudier les systèmes des cercles ayant pour diamètres les segments des tangentes à une ellipse compris entre les tangentes à cette ellipse en ses sommets opposés.

Établissons d'abord un lemme. Supposons qu'une tangente variable à une conique rencontre en T et T' deux tangentes fixes à cette conique. Joignons les points T et T' à un point fixe F du plan de la conique. Les rayons FT et FT' engendrent évidemment deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont les tangentes menées de F à la conique. Donc le rapport anharmonique déterminé par FT et FT' avec ces

(¹) Ce problème fait l'objet de la question n° (2414) (N. A., 1919, p. 39).

deux tangentes est constant. Par suite, si F est un foyer de la conique, les deux tangentes menées de ce point à la conique étant alors les droites isotropes, *l'angle* TFT' *est constant*, par application de la célèbre formule de Laguerre.

Je dis que *si les tangentes fixes que parcourent* T *et* T' *sont les tangentes aux sommets* A *et* A' *du grand axe de l'ellipse, cet angle est droit.* En effet, considérons la position particulière $T_0T'_0$ de la tangente variable parallèle à AA'. Si le foyer F se projette en H sur $T_0T'_0$, on a

$$HT_0 = FA = a - c, \qquad HT'_0 = FA' = a + c, \qquad FH = b,$$

et, par suite,

$$\overline{FH}^2 = HT_0 . HT'_0,$$

ce qui prouve bien que l'angle $T_0FT'_0$ est droit.

Il résulte de là que le cercle décrit sur TT' comme diamètre passe par le foyer F, et, par conséquent, aussi par le foyer F' de l'ellipse.

Ainsi, *tous les cercles ayant pour diamètres les segments des tangentes à ellipse, compris entre les tangentes aux sommets du grand axe, passent par les foyers réels de cette ellipse.*

Le principe de continuité permet d'énoncer également que *les cercles ayant pour diamètres les segments des tangentes compris entre les tangentes aux sommets du petit axe passent par les foyers imaginaires situés sur ce petit axe.* Autrement dit, *ils sont tous orthogonaux au cercle décrit sur la distance des foyers réels pour diamètre.*

Il suffit de projeter la figure formée par un cercle, un de ses diamètres, une tangente parallèle à ce diamètre et deux tangentes parallèles quelconques

pour voir que *le produit des segments déterminés sur une tangente à une ellipse, à partir de son point de contact, par deux tangentes parallèles quelconques à cette ellipse, est égal au carré du demi-diamètre de l'ellipse, parallèle à la première tangente.*

Si donc la tangente en M à l'ellipse coupe les tangentes aux extrémités du grand axe en T et T', et les tangentes aux extrémités du petit axe en U et U', on a, à la fois, en représentant par a' le demi-diamètre de l'ellipse parallèle à cette tangente,

$$\mathrm{MT}.\mathrm{MT}' = \mathrm{MU}.\mathrm{MU}' = a'^2.$$

Le point M appartient donc à l'axe radical des cercles de diamètre TT' et UU', et comme, d'autre part, cet axe radical est perpendiculaire à la ligne TT' des centres, il se confond avec la perpendiculaire élevée en M à TT', c'est-à-dire avec *la normale en* M *à l'ellipse.*

Mais on voit qu'il y a plus, la relation ci-dessus ayant lieu pour les segments déterminés sur la tangente en M par deux tangentes parallèles *quelconques* à l'ellipse, on peut dire que *la normale en* M *est l'axe radical commun de tous les cercles ayant pour diamètres les segments de la tangente en* M *limités à deux tangentes parallèles quelconques à l'ellipse.*

Les points D et D' de cet axe radical par lesquels passent tous ces cercles sont donc tels que

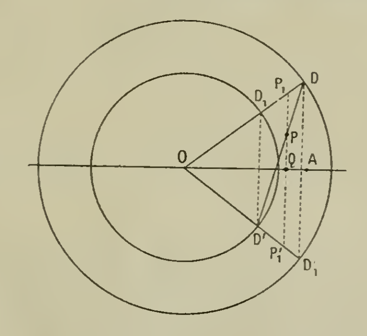
$$\mathrm{MD} = \mathrm{MD}' = a'.$$

Or, on sait que, *si, sur la normale en* M, *on porte, de part et d'autre de* M, *des longueurs* MD *et* MD' *égales au demi-diamètre conjugué de* OM

(O étant le centre de l'ellipse), *les points* D *et* D' *sont respectivement à la rencontre des cercles de centre* O *et de rayons* $a+b$ *et* $a-b$ *avec les demi-droites joignant le point* O *aux points de rencontre de la perpendiculaire à l'axe* AA' *menée par* M *et du cercle décrit sur* AA' *comme diamètre* (1).

Le lieu du point P visé par la troisième partie de l'énoncé peut donc être ainsi défini : *Les cercles de centre* O *et de rayons* $a+b$ *et* $a-b$ *étant coupés en* D *et en* D' *par deux demi-droites symétriques par rapport à* OA, *trouver le lieu du point* P *divisant* DD' *dans un rapport constant.*

Pour trouver ce lieu, considérons les points D_1 et D'_1 où les droites OD et OD' coupent encore les cercles



considérés, tels, par conséquent, que les cordes D_1D' et DD'_1 soient perpendiculaires à OA, et menons par P la parallèle $P_1P'_1$ à ces cordes.

P_1 divisant DD_1 dans le rapport constant suivant lequel P divise DD', le point P_1 décrit un cercle (P_1) de

(1) On trouvera notamment une démonstration géométrique de ce théorème dans la Remarque finale du n° 126 du *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, de M. d'Ocagne (t. I, p. 268).

centre O. D'autre part, les points D et D' divisant OP_1 et OP'_1 dans des rapports constants, la transversale DD' au triangle $OP_1P'_1$ divise le côté $P_1P'_1$ dans un rapport constant. Donc, si l'on prend le milieu Q de $P_1P'_1$, le point P divise l'ordonnée QP_1 du cercle (P_1) dans un rapport constant; il décrit donc une ellipse dont un axe est dirigé suivant OA.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES : CONCOURS DE 1919. — PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ET DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

ÉNONCÉ.

On donne une conique C *et un point* P *dans son plan :*

1° *On demande de déterminer un point* Q *et deux droites* D *et* D' *passant par* P *telles que,* M *étant un point quelconque de la conique, si l'on désigne par* ρ *la distance* QM, *par* δ *et* δ' *les distances respectives du point* M *à chacune des droites* D *et* D', *le rapport* $\frac{\rho^2}{\delta\delta'}$ *soit égal à une constante. Déterminer la valeur de cette constante et discuter les conditions de possibilité du problème;*

2° *Lieu du point* P *quand les droites* D *et* D' *font entre elles un angle de grandeur constante;*

3° *Enveloppe des droites* D *et* D' *quand le point* Q *décrit l'axe focal de la conique.*

Solution par Mlle E. POMMIER.

I. — Traduction analytique de l'énoncé.

Prendre un système d'axes de coordonnées rectangulaires : Soit $f(x, y) = 0$ l'équation de la conique : soient α et β les coordonnées du point P, α' et β' celles du point Q. Les équations des droites D et D′ qui passent par P peuvent se mettre sous la forme

$$D \equiv y - \beta - m(x - \alpha) = 0.$$
$$D' \equiv y - \beta - p(x - \alpha) = 0.$$

L'équation de la conique doit pouvoir s'écrire

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - hDD' = 0,$$

h désignant une constante.

On a donc, en désignant par λ un facteur de proportionnalité.

$$f(x, y) \equiv \lambda[(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - hDD']$$

ou encore

(1) $$f(x, y) + \mu DD' \equiv \lambda[(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2],$$

μ désignant le produit λh.

Cette identité (1) signifie que parmi les coniques passant par les points d'intersection de la conique $f(x, y) = 0$ avec les deux droites $D = 0$ et $D' = 0$, on trouve un cercle de rayon nul de centre Q ; ou encore un système de deux droites imaginaires conjuguées. de coefficients angulaires $\pm i$, se coupant en Q.

II. — Solution géométrique.

Faisons une figure avec des éléments réels.

Soient (*fig.* 1) PD et PD′ deux sécantes coupant la conique respectivement en MN et en M′N′.

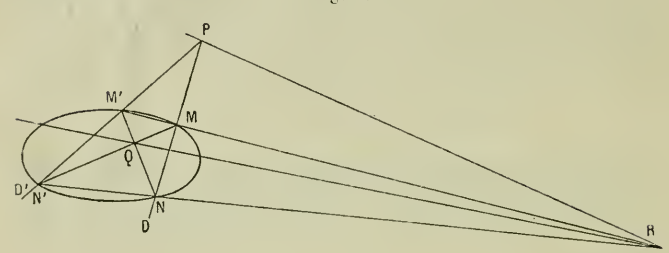
Par les quatre points M, M′, N, N′ passent trois couples de droites, à savoir :

Les droites D et D′.

Puis MN′ et M′N qui se coupent en Q.

Puis MM′ et NN′ qui se coupent en R.

Fig. 1.

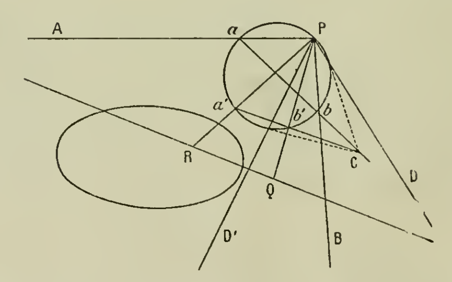


Le triangle PQR est conjugué par rapport à la conique [propriété du quadrilatère complet]. Les côtés QP et QR sont conjugués par rapport aux deux droites MQN′ et NQM′. Les côtés PQ et PR sont conjugués par rapport aux droites D et D′.

Prenons maintenant le cas de l'énoncé actuel.

Si PD et PD′ (*fig.* 2) sont les deux droites que l'on

Fig. 2.



demande de déterminer, elles ne peuvent pas couper la conique en des points réels. Les points M, M′,

N, N′ sont imaginaires. Les droites MN′ et M′N forment un cercle de rayon nul et de centre Q.

Les *droites* QP *et* QR, étant conjuguées par rapport à un cercle de centre Q, *sont rectangulaires*. Donc, P étant donné, pour avoir Q, on prend la polaire de P par rapport à la conique, et l'on abaisse PQ, perpendiculaire sur cette polaire. Le point R est alors le point de rencontre de la polaire du point Q avec la polaire du point P. Déterminons maintenant les droites D et D′.

La conique MN′, M′N étant du genre cercle, toutes les coniques qui passent par les points M, M′, N, N′ ont leurs axes parallèles, donc parallèles à ceux de la conique donnée $f(x, y) = 0$. Par suite, les droites MN et M′N ou D et D′ sont également inclinées sur les directions des axes de la conique donnée.

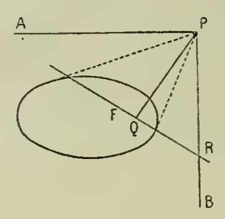
Si donc on mène par P, les parallèles PA et PB aux axes de la conique, les droites D et D′ sont conjuguées harmoniques à la fois par rapport à l'angle $\widehat{APB}$ et par rapport à l'angle $\widehat{QPR}$. On est donc ramené à trouver les droites conjuguées harmoniques à la fois par rapport à deux angles donnés de mêmes sommets. Problème connu; par le sommet P commun aux deux angles, faisons passer un cercle qui coupe les côtés du premier en ab, et ceux du second en $a'b'$. Les droites ab et $a'b'$ se coupent en C. Par C menons les tangentes au cercle. Les droites D et D′ qui joignent le sommet P des angles aux points de contact des tangentes sont conjuguées à la fois par rapport aux deux angles donnés de sommet P.

Ces droites D et D′ sont également inclinées sur les directions des axes PA et PB.

Exemple. — Prenons le point P sur une direc-

trice (*fig.* 3). Sa polaire passe alors par le foyer F correspondant, et le point Q se confond avec ce foyer F.

Fig. 3.



Le point R est alors sur la directrice, et la droite PB se confond avec la droite PR.

Les deux angles $\widehat{APB}$ et $\widehat{QPR}$ ont alors un côté commun, les deux droites D et D′ sont confondues avec ce côté commun PRB.

III. — Solution analytique.

Nous envisagerons successivement le cas de l'ellipse (ou de l'hyperbole) et celui de la parabole.

α. *Cas de l'ellipse.* — Nous allons prendre comme axes de coordonnées les axes de la conique qui a alors pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Pour les équations des droites D et D′, on a alors $m=-p$.

Identifions cette équation de l'ellipse avec celle de la conique écrite sous la forme

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+h[(y-\beta)^2-m^2(x-\alpha)^2]=0$$

ou, pour plus de symétrie, en posant

$$hm^2 = -\lambda,$$
$$h = \mu,$$
$$(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 - \lambda(x-\alpha)^2 - \mu(y-\beta)^2 = 0.,$$

On a pour déterminer les inconnues λ, μ, α', β' les quatre équations

$$\begin{array}{ll}(1) & \left\{\begin{array}{l} a^2(1-\lambda) = b^2(1-\mu) = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 - \alpha'^2 - \beta'^2, \\ \alpha' = \lambda\alpha, \qquad \beta' = \mu\beta. \end{array}\right. \\ (2) & \end{array}$$

Ces équations donnent

$$a^2(1-\lambda) = b^2(1-\mu) = \lambda\alpha^2(1-\lambda) + \mu\beta^2(1-\mu).$$

En divisant par $a^2(1-\lambda)$, il vient

$$1 = \frac{\lambda\alpha^2}{a^2} + \frac{\mu\beta^2(1-\mu)}{a^2(1-\lambda)},$$

mais

$$\frac{1-\mu}{1-\lambda} = \frac{a^2}{b^2},$$

donc

$$(1') \qquad 1 = \frac{\lambda\alpha^2}{a^2} + \frac{\mu\beta^2}{b^2},$$

$$(2') \qquad a^2(1-\lambda) = b^2(1-\mu).$$

Ces deux équations déterminent λ et μ, les deux autres (2) donnent alors α' et β' qui sont toujours réels.

Vérification de la solution géométrique. — La polaire du point $\alpha\beta$ par rapport à la conique est

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0.$$

Le point de coordonnées $\alpha'\beta'$ est sur cette polaire

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} - 1 = 0.$$

Or, d'après la relation (2), ceci donne

$$\lambda \frac{\alpha^2}{a^2} + \mu \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (1'). Donc le point Q est sur la polaire de P.

La droite PQ a pour coefficient angulaire

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 - \mu}{1 - \lambda} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{a^2}{b^2}.$$

Cette droite est perpendiculaire à la polaire du point P, laquelle a pour coefficient angulaire $-\dfrac{\alpha b^2}{\beta a^2}\cdot$

Le point Q est bien sur la polaire de P et sur la perpendiculaire à cette polaire menée par le point P.

Réalité des droites D et D'. — Pour cela, il faut et il suffit que m^2 soit positif, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda\mu < 0.$$

Alors les deux droites sont

$$\lambda(x - \alpha)^2 + \mu(y - \beta)^2 = 0.$$

Elles sont confondues si l'on a

$$\lambda\mu = 0.$$

Or les équations (1') et (2') donnent

$$\lambda = \frac{1 + \dfrac{c^2 \beta^2}{b^4}}{a^2 \left[\dfrac{\alpha^2}{a^4} + \dfrac{\beta^2}{b^4}\right]}, \qquad \mu = \frac{1 - \dfrac{c^2 \alpha^2}{a^4}}{b^2 \left[\dfrac{\alpha^2}{a^4} + \dfrac{\beta^2}{b^4}\right]}.$$

λ est toujours positif. On a alors $\mu \leqq 0$, soit

$$1 - c^2 \frac{\alpha^2}{a^4} \leqq 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha^2 - \frac{a^4}{c^2} \geqq 0.$$

$$\left(\alpha - \frac{a^2}{c}\right)\left(\alpha + \frac{a^2}{c}\right)$$

Le point P ne doit pas être compris entre les deux directrices de la conique.

Si P est sur une des directrices $\mu = 0$, l'équation des deux droites se réduit à $\lambda(x - \alpha)^2 = 0$. Elles sont confondues, parallèles à Oy, et passent par le point d'abscisse α, donc par P qui est sur la directrice.

Lieu de P *quand* D *et* D' *font entre elles un angle constant.* — On a alors,

$$m = \text{const.}$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda}{\mu} = - m^2 = \text{const.}$$

Soit

$$\lambda = - m^2 \mu$$

ou

$$b^2 \left[1 + c^2 \frac{\beta^2}{b^4} \right] = - m^2 \left(1 - c^2 \frac{\alpha^2}{a^4} \right) a^2,$$

$$\frac{c^2 \beta^2}{b^2} - c^2 m^2 \frac{\alpha^2}{a^2} + a^2 m^2 + b^2 = 0,$$

conique du genre hyperbole ayant même centre et mêmes axes que l'ellipse donnée.

Cas particuliers :

1° $\quad m = 0, \quad \lambda = 0, \quad b^4 + c^2 \beta^2 = 0, \quad \beta^2 = - \dfrac{b^4}{c^2};$

P est sur les directrices imaginaires de la conique.

2° m infini

$$\mu = 0, \qquad a^4 = c^2 \alpha^2, \qquad \alpha^2 = \frac{a^4}{c^2};$$

P est sur les directrices de la conique.

Enveloppe des droites D *et* D' *quand le point* Q *décrit l'axe focal de la conique.* — Dans ce cas $\beta' = 0$, soit $p\mu = 0$.

Si $\mu \neq 0$, D et D' restent parallèles à l'axe Oy.

Si $b = 0$, on a

$$\lambda = \frac{a^2}{\alpha^2}, \qquad \mu = \frac{1 - c^2 \dfrac{\alpha_2}{a^4}}{b^2 \dfrac{\alpha^2}{a^4}},$$

$$-m^2 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{a^2}{\alpha^2}\,\frac{b^2 \alpha^2}{(a^4 - c^2 \alpha^2)},$$

$$m^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \alpha^2 - a^4}.$$

L'équation des deux droites devient alors

$$y^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \alpha^2 - a^4}(x - \alpha)^2,$$

soit, après avoir chassé le dénominateur, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de α,

$$\alpha^2 [y^2 c^2 - a^2 b^2] + 2 \alpha x a^2 b^2 - a^4 y^2 - x^2 a^2 b^2 = 0,$$

équation de l'ensemble des deux droites dans laquelle le paramètre α figure au second degré. On obtient l'enveloppe des droites en écrivant que cette équation admet une racine double par rapport à l'inconnue α.

On a donc

$$x^2 a^4 b^2 - [y^2 c^2 - a^2 b^2][a^4 y^2 - x^2 a^2 b^2] = 0.$$

Soit, quand on a divisé par a^2, après réduction des termes semblables,

$$y^2 [y^2 a^2 c^2 - x^2 b^2 c^2 - a^4 b^2] = 0.$$

L'enveloppe des droites se décompose; elle comprend d'une part l'hyperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{c^2} = 0$$

et, d'autre part, deux fois la droite

$$y = 0,$$

c'est-à-dire que les droites sont tangentes à cette hyperbole, ou restent parallèles à l'axe $x'x$.

3. *Cas de la parabole.* — Nous allons rapporter la conique à son axe et à sa tangente au sommet. Elle a alors pour équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

Les droites D et D' sont encore également inclinées sur les axes, et l'on a

$$m = -p.$$

L'équation de la conique étant, d'autre part, écrite sous la forme

$$(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 - \lambda(x-\alpha)^2 - \mu(y-\beta)^2 = 0.$$

L'identification des deux équations nous permet de déterminer les inconnues α', β', λ, μ. On a

$$(1) \qquad 1-\mu = \frac{\alpha' - \lambda\alpha}{p},$$

$$(2) \qquad 1-\lambda = 0, \qquad \beta' = \beta\mu, \qquad \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 - \alpha'^2 - \beta'^2 = 0;$$

on en tire

$$\lambda = 1, \qquad 1-\mu = \frac{\alpha' - \alpha}{p},$$

$$\alpha^2 - \alpha'^2 + \mu\beta^2(1-\mu) = 0,$$

soit

$$\alpha^2 - \alpha'^2 - \mu\beta^2\,\frac{\alpha'-\alpha}{p} = 0,$$

$$(\alpha' - \alpha)\left[\frac{\mu\beta^2}{p} - \alpha - \alpha'\right] = 0.$$

Nous supposerons $\alpha' \neq \alpha$, sans quoi on aurait $\mu = 1$ et par suite $\beta' = \beta$. P et Q sont confondus et P est sur la conique. Il vient donc

$$\frac{\mu\beta^2}{p} - \alpha - \alpha' = 0 \qquad \text{et} \qquad 1-\mu = \frac{\alpha' - \alpha}{p},$$

Soit encore

$$\frac{\mu\beta^2}{p} - \alpha' = \alpha, \qquad p\mu + \alpha' = p + \alpha.$$

Ces deux équations déterminent α' et μ. On en tire

$$\mu = \frac{p(p+2\alpha)}{p^2+\beta^2}, \qquad \alpha' = \alpha + \frac{p[\beta^2 - 2p\alpha]}{\beta^2+p^2}.$$

D'autre part,

$$\beta' = \frac{p\beta[p+2\alpha]}{p^2+\beta^2}.$$

Vérification de la solution géométrique. — La polaire du point $\alpha\beta$ par rapport à la conique a pour équation

$$y\beta - px - p\alpha = 0.$$

Le point de coordonnées $\alpha'\beta'$ est sur cette polaire

$$\beta'\beta - p\alpha' - p\alpha = 0,$$

ce qui donne

$$\mu\beta^2 - p[\alpha' + \alpha] = 0,$$

expression que nous avons trouvée comme conséquence des équations (1) et (2). Donc le point Q est sur la polaire de P.

Coefficient angulaire de la droite PQ

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta(\mu - 1)}{p(1-\mu)} = -\frac{\beta}{p}.$$

Cette droite est perpendiculaire à la polaire du point P, qui a pour coefficient angulaire $\frac{p}{\beta}$.

Réalité des droites D *et* D'. — Comme $\lambda = 1$, il faut et il suffit que l'on ait $\mu \leqq 0$.

Alors les deux droites sont

$$(x-\alpha)^2 + \mu(y-\beta)^2 = 0.$$

$\mu \leqq 0$ donne

$$\frac{p(p+2\alpha)}{p^2+\beta^2} \leqq 0;$$

p étant supposé positif, il vient

$$\alpha \leqq -\frac{p}{2}.$$

P doit être à gauche de la directrice. S'il vient sur la directrice, $\mu = 0$ et les deux droites D et D′ sont confondues entre elles et avec la directrice.

Lieu de P *quand* D *et* D′ *font entre elles un angle constant.* — On doit avoir

$$\frac{\lambda}{\mu} = -m^2 = \text{const.};$$

par suite,

$$-m^2 = \frac{1}{\mu},$$

soit

$$1 + m^2\mu = 0,$$

$$p^2 + \beta^2 + m^2 p(p+2\alpha) = 0,$$

$$\beta^2 + 2pm^2\alpha + p^2(1+m^2) = 0,$$

conique du genre parabole ayant même axe que la parabole donnée.

Cas particuliers :

$$m = 0, \qquad p^2 + \beta^2 = 0, \qquad \beta^2 = -p^2;$$

$$m \text{ infini}, \qquad \mu = 0, \qquad p = -2\alpha;$$

P est sur la directrice.

$$m = \pm i, \qquad 1 + m^2 = 0, \qquad \beta^2 - 2p\alpha = 0;$$

P est sur la conique.

Enveloppe des droites D *et* D′ *quand* Q *décrit*

l'axe focal de la conique. — $\beta' = 0$ entraîne $\beta\mu = 0$.

Si $\mu = 0$, D et D' restent parallèles à Oy.

$\beta = 0$. On a alors

$$\mu = \frac{p + 2\alpha}{p}$$

et

$$- m^2 = \frac{p}{p + 2\alpha}.$$

L'équation des deux droites devient alors

$$y^2 + \frac{p}{p + 2\alpha}(x - \alpha)^2 = 0,$$

soit, après avoir chassé le dénominateur, en ordonnant par rapport à α,

$$p\alpha^2 - 2\alpha[- y^2 + px] + p[x^2 + y^2] = 0.$$

Cette équation a une racine double α si l'on a

$$[y^2 - px]^2 - p^2[x^2 + y^2] = 0,$$

soit

$$y^2[y^2 - 2px - p^2] = 0.$$

Les droites D et D' sont, dans ce cas, ou parallèles à l'axe de la parabole, ou tangentes à la parabole ayant pour équation

$$y^2 - 2px - p^2 = 0.$$

Remarque. — Si l'on déplace P en R, réciproquement R vient en P. Si les deux droites D et D' passant par P sont réelles, les deux droites analogues passant par R sont imaginaires et inversement.

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *Sur la détermination du rayon de courbure en coordonnées polaires.* — Le théorème

démontré récemment par M. Goormaghtigh (*N. A.*, 1919, p. 178), ne fait que généraliser celui que nous avons fait connaître, il y a longtemps (*Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale*, 1896, p. 286), pour la détermination du rayon de courbure en coordonnées polaires. Nous rappellerons une fois de plus ce théorème, que nous avons déjà eu occasion de citer à diverses reprises, mais en nous servant ici des notations de M. Goormaghtigh, afin de rendre la comparaison plus facile :

Soit (T) la courbe décrite par l'extrémité T du rayon vecteur $MT = r$, compté à partir du pôle M. Si r' et r'' sont les deux premières dérivées de r par rapport à l'angle polaire TMx, portons sur les axes obtenus en faisant tourner successivement TM de deux droits (par suite, le sens positif du second étant le même que le sens négatif de TM), les segments $TN = r'$ et $TJ = r''$. Les droites TN et NJ sont les normales aux courbes (T) et (N). Voici, dès lors, quel est notre théorème :

Si la perpendiculaire élevée en N *à* TN *coupe* TJ *en* K, *le centre de courbure répondant à* T *se trouve sur la droite joignant le point* K *au milieu de* NJ.

Il n'est donc pas étonnant qu'en appliquant sa construction générale au cas où la courbe (M) se réduit à un point (auquel cas elle coïncide avec la construction qui vient d'être rappelée), M. Goormaghtigh retrouve exactement les propositions que nous en avions, pour notre part, jadis déduites, particulièrement dans le cas des radiales (comparer l'énoncé des *Nouvelles Annales* de 1919, p. 181-182, à celui de 1902, p. 113) et de la spirale d'Archimède (comparer l'énoncé de la Note au

bas de la page 182 des *Nouvelles Annales*, de 1919, à celui de la page 286 du *Cours* ci-dessus cité, que nous avions, au reste, déjà fait connaître dès 1880 dans les *Nouvelles Annales*, p. 292).

AVIS.

L'enseignement des mathématiques à l'Université de Strasbourg.

Gradation des cours. — D'une façon très approximative on peut grouper les enseignements des sciences exactes à la Faculté des Sciences de la façon suivante :

Pour les débutants : Mathématiques préparatoires (un semestre) ; Mathématiques générales (un semestre) ; Physique, cours du P. C. N. (une année) ; Chimie, cours du P. C. N. (une année).

Pour la seconde et la troisième année ou pour les meilleurs élèves des lycées : Calcul différentiel et intégral, Mécanique rationnelle, Physique générale ; ou bien : Mathématiques générales, Physique générale, Chimie générale.

Pour la troisième ou la quatrième année : Astronomie, Physique du Globe, Conférences de préparation à l'enseignement.

Enfin viennent les cours à sujets variables (Analyse supérieure, Géométrie supérieure, Théorie des fonctions, etc.) qui s'adressent aux étudiants les plus avancés et qui pourraient aussi intéresser les ingénieurs, les officiers d'artillerie ou du génie et en général toutes les personnes ayant une culture mathématique développée.

Avec ses cinq professeurs titulaires et ses trois maîtres de conférences, l'Institut de mathématiques

pourra offrir aux étudiants une grande variété de cours et les conduire jusqu'aux parties les plus élevées de la science. Outre les cours fondamentaux, chaque année et surtout dans le second semestre, des cours seront faits sur des sujets renouvelés annuellement et propres à encourager les étudiants dans la voie des recherches originales. (On trouvera marqués d'une astérisque dans le programme qui termine cette note, ceux de ces sujets spéciaux qui seront traités en 1919-1920).

Préparation aux examens — Le premier groupe d'enseignement convient pour les futurs ingénieurs qui désirent se préparer à Strasbourg pour l'examen d'entrée dans la première année normale des Instituts techniques français.

Il convient également pour les aspirants et aspirantes au professorat des Écoles normales primaires, des Écoles primaires supérieures et des Écoles pratiques d'industrie.

Le deuxième et le troisième groupe conviennent aux candidats à la licence d'enseignement (professeurs de collèges, chargés de cours de lycées).

Le quatrième groupe et le cinquième groupe conviennent aux candidats à l'agrégation, au diplôme d'études supérieures et au doctorat, etc.

Conditions d'admission. — Tous les « cours » de Mathématiques sont libres et gratuits.

Pour assister aux « conférences » et « travaux pratiques « et pour passer les examens, il est nécessaire de remplir certaines conditions qui seront détaillées dans l'Annuaire publié par l'Université ou dont on prendra connaissance au Secrétariat de l'Université.

On apprendra ainsi comment un élève présentant des aptitudes scientifiques très marquées peut être

dispensé du baccalauréat. Ces dispositions intéressent particulièrement ceux des instituteurs et institutrices dont la valeur se distingue de la moyenne et parmi lesquels les Facultés des Sciences trouvent souvent outre-Vosges d'excellentes recrues.

Pour tous autres renseignements d'ordre non administratif, en particulier pour les conseils d'ordre pédagogique et scientifique, écrire au professeur intéressé (adresse : nom du professeur, Institut de Mathématiques, Université de Strasbourg).

Programme des cours et conférences de mathématiques pour l'année scolaire 1919-1920

PREMIER SEMESTRE.

Mathématiques préparatoires et Mathématiques générales. — M. X..., professeur, 3 cours par semaine; M. Darmois, maître de conférences, 2 conférences par semaine.

Calcul différentiel et intégral. — M. Valiron, professeur, 3 cours par semaine ; M. Antoine, maître de conférences, 2 conférences par semaine.

Mécanique rationnelle. — M. Villat, professeur, 3 cours par semaine ; M. Véronnet, chargé de conférences, 2 conférences par semaine.

Astronomie. — M. Esclangon, professeur, 2 cours par semaine.

*Analyse supérieure** ([1]). — M. Fréchet, professeur : Calcul fonctionnel, 2 cours par semaine ; Fonctions d'approximation, 1 cours par semaine.

([1]) Les cours dont les titres sont suivis d'un astérisque (*) portent sur des sujets variables chaque année et s'adressent aux étudiants avancés.

DEUXIÈME SEMESTRE.

Mathématiques générales. — M. X..., professeur, 1 cours par semaine; M. Darmois, maître de conférences, 2 conférences par semaine.

Calcul différentiel et intégral. — M. Valiron, professeur, 1 cours par semaine; M. Antoine, maître de conférences, 2 conférences par semaine.

Mécanique rationnelle. — M. Villat, professeur, 1 cours par semaine; M. Véronnet, chargé de conférences, 2 conférences par semaine.

Astronomie. — M. Esclangon, professeur, 2 cours par semaine; M. Danjon, astronome-adjoint, travaux pratiques à l'Observatoire.

Analyse supérieure.* — M. Fréchet, professeur : Calcul fonctionnel, 3 cours par semaine.

Géométrie supérieure.* — M. X..., professeur : Déformation des surfaces, 2 cours par semaine.

Théorie des fonctions.* — M. Valiron, professeur : Fonctions entières, 2 cours par semaine; M. Villat, professeur : Fonctions elliptiques avec application à la Physique mathématique, 2 cours par semaine.

PREMIER ET DEUXIÈME SEMESTRES.

Préparation a l'enseignement (sous la direction de M. Villat, professeur) :

Mathématiques spéciales. — M. Villat, professeur, 1 conférence par semaine.

Mathématiques élémentaires. — M. N..., 1 conférence par semaine.

Calcul différentiel et intégral. — M. Antoine, maître de conférences, 1 conférence par semaine.

Mécanique rationnelle. — M. Darmois, maître de conférence, 1 conférence par semaine.

Travaux pratiques de Mathématiques : M. X..., directeur du laboratoire de Mathématiques ; M. N..., préparateur de Mathématiques.

L'horaire sera établi suivant le nombre des étudiants inscrits.

Institut de Mathématiques : M. Fréchet, directeur.

L'horaire des colloques mathématiques (destinés à encourager les recherches originales) sera établi ultérieurement suivant le nombre des chercheurs inscrits.

QUESTIONS.

2421. La courbe (M′) se déduit de la courbe (M) par la construction suivante : le point M′ est à la rencontre de la perpendiculaire élevée en M au rayon vecteur OM et de la perpendiculaire menée de O à la tangente en M à la courbe (M) (¹). Construire le centre de courbure μ de la courbe (M) connaissant la normale de la courbe (M′). M. d'Ocagne.

2422. On considère les ellipses qui ont un même foyer F et un même sommet B du petit axe. Trouver :

1° L'enveloppe de ces courbes ; 2° le lieu des sommets A, A′ du grand axe ; 3° le lieu du centre de courbure en B ; 4° le lieu du centre de courbure au second sommet B′ du petit axe.

J. Neuberg.

2423. On considère les coniques U qui ont même axe focal $2a$, même foyer F et le second foyer F′ en un point quelconque d'une droite donnée. Trouver :

1° le lieu des sommets A, A′ de l'axe focal ; 2° l'enveloppe des directrices d, d' ; 3° l'enveloppe des coniques U.

J. Neuberg.

(¹) C'est la transformation étudiée récemment par M. M.-F. Egan (*N. A.*, 1919, p. 14). La courbe (M′) est une adjointe infinitésimale de la courbe (M) (*N. A.*, 1900, p. 219).

[N¹I]

SUR LE COMPLEXE DE PAINVIN;

PAR M. A. MYLLER.

---

1. Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XI, 1872, Painvin a étudié le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires [1]. Il a étudié spécialement le cas où la quadrique est un ellipsoïde et il s'est proposé (p. 539) d'étudier aussi le cas des quadriques dénuées de centre; mais cette étude ne se trouve pas dans ses travaux ultérieurs. C'est de ce cas qu'il s'agira dans ce qui suit.

2. Soit la quadrique dénuée de centre

$$(1) \qquad z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right).$$

La podaire de cette quadrique par rapport au pôle $P(x_0 y_0 z_0)$ est la surface

$$2(z - z_0)[x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)] + a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 = 0.$$

Cette podaire a la propriété d'être coupée par un plan parallèle au plan xOy

$$(2) \qquad z - k = 0$$

suivant une conique. Le cône ayant pour sommet le

---

[1] Voir aussi A. DEMOULIN, *Sur le complexe des droites*, etc. *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XX.

point P et pour directrice cette conique a pour équation

$$(3)\ (a+2k)(x-x_0)^2+(b+2k)(y-y_0)^2+2k(z-z)^2$$
$$-2[(x-x_0)z_0-(z-z_0)x_0](x-x_0)$$
$$-2[(y-y_0)z_0-(z-z_0)y_0](y-y_0)=0.$$

Les génératrices du cône déterminent, quand P varie, un complexe quadratique dont l'équation en coordonnées plückériennes résulte immédiatement de (3) et de

$$p_{12}=xy_0-yx_0,\qquad p_{23}=yz_0-zy_0,\qquad p_{31}=zx_0-xz_0,$$
$$p_{14}=x-x_0,\qquad p_{24}=y-y_0,\qquad p_{34}=z-z_0.$$

Cette équation est

$$(4)\qquad (a+2k)p_{14}^2+(b+2k)p_{24}^2+2kp_{34}^2$$
$$-2(p_{13}p_{14}+p_{23}p_{24})=0.$$

Montrons que les droites de ce complexe sont les intersections de deux plans perpendiculaires tangents respectivement aux paraboloïdes homofocaux :

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a+\lambda}+\dfrac{y^2}{b+\lambda}-2z-\lambda=0, \\ \dfrac{x^2}{a+\mu}+\dfrac{y^2}{b+\mu}-2z-\mu=0, \end{cases}$$

où

$$(6)\qquad \lambda+\mu=-2k-a-b.$$

En effet, d'après un théorème connu de Monge, généralisé par Bobillier, le plan (2) est le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les plans sont respectivement tangents aux quadriques homofocales (1) et (5). Le plan passant par un point M de la conique du plan (2) et perpendiculaire à MP est tangent à la quadrique (1) parce que M est un point de la

podaire. La droite MP du complexe, étant par conséquent une arête du trièdre de Monge-Bobillier, a la propriété énoncée.

Les paramètres λ et μ pouvant prendre toute valeur qui satisfait à (6), on peut prendre $\lambda = \mu$ et par conséquent le complexe (4) est le complexe de Painvin relatif à la quadrique

$$\frac{x^2}{a+\rho} + \frac{y^2}{b+\rho} - 2z - \rho = 0,$$
$$\rho = -k - \frac{a+b}{2},$$

et si l'on prend

$$k = -\frac{a+b}{2},$$

on obtient le complexe de Painvin relatif à (1).

3. Si le cône (3) se décompose en deux plans, le sommet P décrit la surface singulière du complexe (4). Il en résulte que la surface singulière est le lieu des pôles des podaires de la quadrique (1) tangents au plan (2). Son équation est

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a+2k-2z} + \frac{y^2}{b+2k-2z} - 2k = 0,$$

qui représente une surface cubique de quatrième classe de Cayley.

La droite singulière, qui est l'intersection de deux plans en lesquels se décompose le cône, et le point singulier P sur cette droite se déterminent par la construction géométrique suivante : on mène en un point π du paraboloïde (1) le plan tangent Π. Ce plan rencontre le plan (2) suivant une droite d. Toutes les droites menées perpendiculairement au plan Π par les points de la droite d appartiennent au complexe. Parmi celles-ci est singulière la droite QD menée par

le pied Q de la perpendiculaire abaissée de π sur d. Le point singulier p se trouve sur QD à l'intersection de cette droite avec la sphère passant par π et tangente en Q au plan (2).

Cette construction résulte de la propriété connue que la sphère ayant pour diamètre la droite qui joint le pôle au point de contact du plan tangent est tangente à la podaire au point correspondant. Dans notre cas, la sphère doit être tangente au plan (2) en un point de la droite d, pour que la podaire aussi soit tangente ; elle ne peut donc avoir que la position indiquée précédemment.

4. Les droites du complexe (4) situées dans le plan

$$u_0 x + v_0 y + w_0 = 0 \tag{8}$$

peuvent être obtenues comme il suit : considérons le cylindre C circonscrit au paraboloïde (1) et ayant ses génératrices perpendiculaires à (8). Le plan (8) est coupé par ce cylindre suivant une parabole p et par le plan (2) suivant une droite d perpendiculaire à l'axe de la parabole. Les droites du complexe situées dans le plan (8) seront les perpendiculaires élevées sur les tangentes à p par les points de leurs intersections avec d. Il résulte du théorème de Monge-Bobillier, appliqué aux figures planes, que l'enveloppe de ces perpendiculaires sera une parabole π homofocale à p. La parabole π se réduit à deux points, dont l'un à l'infini, si la droite d est tangente à la parabole.

5. Les plans P pour lesquels la parabole π se réduit à deux points sont les plans qui passent par l'intersection des plans tangents à (1) avec le plan (2) et qui sont perpendiculaires à ces points tangents. En effet, les droites du plan P perpendiculaires à l'intersection

forment un faisceau de droites du complexe qui passent par un point à l'infini; dans le même plan, il y aura par conséquent un faisceau de droites passant par un point à distance finie. L'enveloppe de ces plans P est la surface singulière (7).

6. Assujettissons le plan (8) à un mouvement de translation. Dans le plan (8), la parabole π varie en formant le système des paraboles homofocales à une parabole fixe p. Dans l'espace, la parabole π décrit un cône du deuxième degré dont le sommet est un point de la surface singulière, à savoir celui à distance finie des deux points en lesquels dégénère une des paraboles π. Le cône est circonscrit à la surface singulière parce qu'il est l'enveloppe de plans qui passent par l'intersection des plans tangents au cylindre C avec le plan (2) et ils sont perpendiculaires à ces plans.

Soient M un point de la surface singulière, P et P′ les deux plans en lesquels se décompose le cône (3) du complexe. Le cône, ayant le sommet en M et circonscrit à la surface singulière, se décompose donc en deux cônes du deuxième degré K et K′ respectivement tangents à P et P′. Les sections des cônes K et K′ par des plans parallèles aux plans P et P′, respectivement, sont les paraboles π.

[M[1]8a]

QUELQUES APPLICATIONS D'UNE REMARQUE DE M. D'OCAGNE;

Par M. M.-F. EGAN.

Dans sa belle étude sur les cycloïdales (¹), M. d'Ocagne préconise l'emploi de deux angles qu'il nomme *coor-*

(¹) *N. A.*, 1915, p. 563. *Voir* spécialement p. 565-567.

données naturelles. Comme ces angles dépendent d'un choix particulier de la droite initiale, il est parfois plus commode de considérer leurs variations. Ainsi, l'équation (3) de M. d'Ocagne (p. 566) peut se traduire :

Si un vecteur OM *de longueur donnée tourne autour du point fixe* O *avec la vitesse angulaire* Ω, *une droite* δ *passant par* M *et animée d'une vitesse angulaire* $c\Omega$ (*c étant une constante*) *enveloppe une cycloïdale dont l'indice n est donné par l'équation*

$$c = 1 + \frac{n}{2}.$$

[L'indice d'une cycloïdale est le rapport des rayons des cercles fixe et mobile engendrant la courbe. Pour une hypocycloïde, n est négatif. Rappelons qu'une cycloïdale donnée a deux indices, liés par l'équation

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} = -1.]$$

Nous allons appliquer ce théorème à la recherche de quelques enveloppes classiques.

1. Si un segment donné de δ glisse entre deux droites rectangulaires Ox, Oy, le milieu M du segment décrit un cercle de centre O, et les vitesses angulaires de OM et de δ sont égales et opposées, d'où $c = -1$, $n = -4$; l'enveloppe de δ est donc une hypocycloïde à quatre rebroussements.

2. Considérons un triangle ABC, et soit δ la droite de Simson d'un point variable X sur le cercle circonscrit. Soient S le centre de ce cercle, O le centre du

cercle des neuf points, H l'orthocentre. La droite δ passe par le milieu M de HX : M décrit le cercle des neuf points. Les rayons OM et SX tournent avec la même vitesse angulaire, CX tourne avec une vitesse moitié moindre, et il est facile de constater que les vitesses angulaires de δ et de CX sont égales et opposées. On a donc

$$c = -\frac{1}{2}, \; n = -3;$$

l'enveloppe de δ est une hypocycloïde à trois rebroussements, tritangente au cercle des neuf points.

3. Soit encore δ l'axe d'une parabole circonscrite au triangle ABC. Si Z est le quatrième point d'intersection de la parabole avec le cercle circonscrit au triangle, δ passe par le centre M des distances moyennes des quatre points A, B, C, Z (¹). Soient G le centre de gravité du triangle, S le centre du cercle circonscrit, O le point divisant GS dans le rapport 1 : 3. Lorsque Z se déplace, M décrit un cercle de centre O, et les rayons SZ et OM sont parallèles. Comme δ est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle (CZ, AB), sa vitesse angulaire est égale à la moitié de celle de CX, donc au quart de celle de SX ou OM. On a par conséquent $c = \frac{1}{4}$, $n = -\frac{3}{2}$, $n' = -3$, et l'enveloppe est encore une H_3 tritangente au cercle (M).

Ajoutons que cette dernière H_3 s'identifie avec l'enveloppe des droites de Simson du triangle médian A'B'C'. En effet, prenons AZ parallèle à BC, et considérons les deux paraboles H, H' passant par A, B, C, Z. H se réduit aux deux droites BC, AZ, son axe est donc B'C'. L'axe de H' est donc perpendiculaire à B'C' et à BC;

(¹) J. Bouchary, *N. A.*, 1918, p. 466.

il passe donc par le milieu A′ de BC, puisque BC est une corde de Π′. Il s'ensuit que les côtés et les perpendiculaires du triangle médian sont des positions de δ, ce qui démontre la proposition. On est amené ainsi à l'énoncé suivant, dont il serait intéressant de trouver une démonstration géométrique (la vérification par l'analyse n'est pas difficile) :

Soient Δ un triangle inscrit à une parabole, et Δ′ son triangle médian : l'axe de la parabole est une droite de Simson pour Δ′.

4. Considérons encore l'axe d'une parabole inscrite au triangle ABC. Soient X le foyer, δ la tangente au sommet, δ′ l'axe. Il suffit de remarquer que δ est la droite de Simson de X, que δ′ passe par X, et que δ et δ′ ont même vitesse angulaire lorsque X se déplace sur le cercle circonscrit, pour voir que δ′ et δ enveloppent deux H_3, tritangentes au cercle circonscrit et au cercle des neuf points respectivement.

[B12d]

QUELQUES APPLICATIONS DES FORMULES VECTORIELLES (L) [1];

PAR M. LE LIEUTENANT-COLONEL LEVEUGLE.

8. *Lignes de courbure.* — On appelle *lignes de courbure* d'une surface les lignes tracées sur cette surface et dont la tangente est perpendiculaire à la direction qui lui est conjuguée.

---

[1] Suite à la *Note sur le déplacement infiniment petit d'un trièdre attaché à une courbe* (N. A., 1919, p. 1).

On a donc en chaque point d'une ligne de courbure $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Les équations M deviennent

$$g = \theta \sin H,$$
$$\varepsilon = \theta \cos H,$$
$$\tau + dH = 0.$$

La troisième équation exprime que les *normalies des lignes de courbure sont développables*, ainsi que je l'ai démontré dans un Mémoire non encore publié.

Les équations (L) deviennent alors

$$d\varphi' = gj + n\varepsilon,$$
$$dj = -g\varphi',$$
$$dn = -\varepsilon\varphi'.$$

On ne peut manquer d'être frappé par la similitude de forme de ces équations avec celles de Frenet, surtout en les écrivant

$$dn = -\varepsilon\varphi',$$
$$d\varphi' = \varepsilon n + gj,$$
$$dj = -g\varphi'.$$

Or n est tangente à l'arête de rebroussement Γ de la normalie correspondant à la courbe C. On en déduit que, si l'on considère deux points correspondants P et Q sur C et Γ :

1° La *tangente* au point Q à la courbe Γ est normale à la surface S et *son angle de contingence* (ε) est égal à l'angle de deux normales infiniment voisines à la surface, c'est-à-dire à l'angle de contingence de la ligne de courbure.

2° La *binormale* (j) au point Q de la courbe Γ est perpendiculaire au plan de section normale passant par la tangente en P à la ligne de courbure et l'*angle*

de torsion de Γ est égal à l'angle de contingence géodésique de la ligne C au point correspondant.

3° La *normale principale* à la courbe $\Gamma(\rho')$ est parallèle à la tangente en P à la ligne de courbure.

Il résulte de 2° que si la ligne de courbure C est une ligne géodésique de S, la courbure géodésique de cette courbe étant nulle en chaque point, il en est de même de la torsion de Γ. Donc Γ est une courbe plane et par conséquent aussi C. Par suite :

4° Si une ligne de courbure d'une surface est en même temps ligne géodésique, cette courbe est plane.

9. *Lignes asymptotiques.* — On appelle *lignes asymptotiques* sur une surface les lignes pour lesquelles la tangente est à elle-même sa propre conjuguée. On a donc dans ce cas $\varphi = 0$.

Les équations (L) deviennent

$$\begin{aligned} d\rho' &= gj, \\ dj &= -g\rho' - n\varepsilon, \\ dn &= \varepsilon j, \end{aligned}$$

et les formules (M)

$$\begin{aligned} g &= \theta \sin H, \\ \theta \cos H &= 0, \\ -\varepsilon \cos\varphi &= \tau + dH. \end{aligned}$$

θ n'étant pas constamment nul, on a $\cos H = 0$ ou $H = \frac{\pi}{2}$. Il en résulte $dH = 0$ et par suite $\varepsilon = -\tau$, $g = \theta$. De sorte que les formules (L) prennent la forme

$$\begin{aligned} d\rho' &= \theta j, \\ dj &= -\theta\rho' + \tau n, \\ dn &= -\tau j. \end{aligned}$$

formules identiques aux formules (F) où l'on remplacerait ν par j et μ par n. On voit que :

Le trièdre normal d'une ligne asymptotique est formé par la tangente à cette courbe, la perpendiculaire à la tangente menée dans le plan tangent (normale principale) et la normale à la surface (binormale de la courbe).

Il en résulte de nombreuses conséquences :

Le plan osculateur d'une ligne asymptotique est le plan tangent à la surface.

La courbure d'une asymptotique est égale à sa courbure géodésique,

La torsion d'une asymptotique est égale à l'angle de deux normales infiniment voisines.

Supposons qu'en un point les deux lignes asymptotiques soient rectangulaires. Désignons par un accent les arêtes du trièdre normal de la deuxième courbe. On aura

$$i' = j, \qquad j' = -i, \qquad n' = n,$$

avec

$$di' = j'\theta',$$
$$dj' = -i'\theta' + n'\tau',$$
$$dn' = -j'\tau'.$$

En comparant avec les équations précédentes, on en déduit

$$\theta = \theta', \qquad \tau = \tau' = 0.$$

Donc, *en un point de la surface où les courbes asymptotiques sont rectanglaires elles ont même angle de contingence et une torsion nulle.*

10. *Lignes géodésiques.* — On appelle *ligne géodésique* une ligne tracée sur une surface de manière

qu'en chaque point son plan osculateur soit normal à la surface.

On a donc pour ces lignes

$$\mathrm{H} = 0, \qquad d\mathrm{H} = 0.$$

On en déduit (M)

$$\begin{aligned} g &= 0,\\ \theta &= \varepsilon \sin\varphi,\\ \tau &= -\varepsilon \cos\varphi \end{aligned}$$

et les équations (L) deviennent

$$\begin{aligned} d\rho' &= n\theta,\\ dn &= -\theta\rho' - j\tau,\\ dj &= n\tau. \end{aligned}$$

La première équation (M) montre que la courbure géodésique d'une ligne géodésique est nulle en chaque point.

On déduit des deux autres

$$\varepsilon = \sqrt{\theta^2 + \tau^2}.$$

Or on sait que $\sqrt{\theta^2 + \tau^2}$ s'appelle la *courbure totale* de la courbe. On en déduit que la courbure totale de la courbe en un point est égale à l'angle de deux normales infiniment voisines à la surface.

Les équations (L) sont identiques aux formules (F), sauf que le trièdre ρ', n, j est à gauche au lieu d'être à droite. Il en résulte que la normale à la surface est normale principale de la courbe et que le plan rectifiant de la courbe (c'est-à-dire le plan perpendiculaire à la normale principale et dont la caractéristique est la droite rectifiante) est le plan tangent à la surface. On en déduit que :

La direction conjuguée de la tangente à une géodésique est la rectifiante de la courbe.

Nous nous bornerons à ces quelques indications sommaires que nous avons d'ailleurs développées dans un Mémoire qui paraîtra peut-être prochainement.

[I3b]

TROIS DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES DE FERMAT ET DE WILSON;

Par M. Léon POMEY,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

Chacune de ces démonstrations établit *simultanément* ces deux théorèmes classiques, qu'on voit ainsi découler d'une même source :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par lui, p divise $a^{p-1}-1$ (Fermat) et $(p-1)!+1$ (Wilson).

PREMIÈRE DÉMONSTRATION.

Le nombre a, étant premier avec p, a pour reste, par rapport au module premier p, un des nombres 1, 2, 3, ..., $p-1$; autrement dit, p divise un des $(p-1)$ nombres $(a-1)$, $(a-2)$, ..., $(a-p+1)$ et par suite leur produit. Ordonnons celui-ci par rapport aux puissances décroissantes de a; en désignant par Σ_1 la somme des $(p-1)$ premiers entiers, par Σ_2 celle de leurs produits deux à deux, etc., on a la congruence

$$(1)\qquad a^{p-1}-\Sigma_1 a^{p-2}+\Sigma_2 a^{p-3}-\ldots \\ -\Sigma_{p-2}a+1.2.3\ldots(p-1)\equiv 0 \pmod p.$$

On en obtient d'ailleurs une analogue en remplaçant a par le produit $k.a$, où k est un entier quelconque

non divisible par p; d'où

$$(2)\quad k^{p-1}a^{p-1} - \Sigma_1 k^{p-2}a^{p-2} + \Sigma_2 k^{p-3}a^{p-3} - \ldots - \Sigma_{p-2}ka + (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}.$$

Retranchons membre à membre (1) et (2); le terme $(p-1)!$ disparaît, et l'on peut diviser le résultat par a. Il reste alors une congruence de degré $(p-2)$ en a, laquelle est satisfaite pour $(p-1)$ valeurs incongrues deux à deux $(\bmod p)$, savoir $a = 1, 2, \ldots, (p-1)$.

Or, d'après un théorème bien connu, le nombre des racines d'une congruence à module premier ne peut être supérieur à son degré, sinon la congruence doit être une identité. Il en résulte que les $(p-1)$ coefficients de la congruence considérée doivent être tous divisibles par p. D'où

$$(3)\qquad k^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

$$(4)\quad (k^{p-1-n} - 1)\Sigma_n \equiv 0 \pmod{p}, \quad (n = 1, 2, \ldots, p-2).$$

La congruence (3) donne le *théorème de Fermat* (il suffit d'y faire $k = a$ pour retomber sur les notations de l'énoncé).

Les congruences (4) montrent que les $(p-2)$ coefficients $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-2}$ sont divisibles par p; en effet, si l'un d'eux Σ_n ne l'était pas, il en résulterait que la congruence $k^{p-1-n} - 1 \equiv 0$, qui est de degré $(p-1-n)$, aurait les $(p-1)$ racines $k = 1, 2, \ldots, (p-1)$, ce qui, d'après le théorème rappelé plus haut, est impossible. En tenant compte de ces divers résultats, la congruence (1) se réduit à

$$1 + (p-1)! \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est le *théorème de Wilson* (dont la réciproque est évidente) [1]. C. Q. F. D.

---

[1] Par cette méthode, les deux théorèmes (Fermat-Wilson) sont

Remarque. — Nous avons, en outre, obtenu incidemment ce théorème bien connu :

Théorème X. — *Les fonctions symétriques simples* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-2}$ des $(p-1)$ *premiers nombres entiers sont divisibles par p, quand ce nombre est premier.*

On en déduit immédiatement une *proposition analogue pour les sommes de puissances semblables* $S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$ au moyen des formules de Newton :

$$S_n - \Sigma_1 S_{n-1} + \Sigma_2 S_{n-2} - \ldots + (-1)^n n \Sigma_n = 0$$
$$(n = 1, 2, \ldots, p-2).$$

DEUXIÈME DÉMONSTRATION.

Lemme. — *Les sommes* S_n *des puissances d'exposant* n *des* $(p-1)$ *premiers entiers sont divisibles par le nombre premier* p *pour* $n = 1, 2, \ldots, p-2$.

En effet, on a

$$(x+1)^n - x^n = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1.$$

En remplaçant x successivement par $1, 2, \ldots, (p-1)$ et ajoutant membre à membre, il vient

$$p^n - 1 = C_n^1 S_{n-1} + C_n^2 S_{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} S_1 + (p-1)$$

ou

$$C_n^1 S_{n-1} + C_n^2 S_{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} S_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Puisque $S_1 = p.\dfrac{p-1}{2}$ est divisible par p, on voit (en

---

démontrés *simultanément* en prenant pour base le théorème, rappelé dans le texte, sur les congruences. Au contraire (à ma connaissance) les démonstrations qu'on donne du théorème de Wilson en se fondant sur l'emploi du théorème en question supposent toujours en outre le théorème de Fermat démontré au préalable par une autre voie.

faisant ensuite $n = 2, 3, \ldots$) qu'il en est de même pour $S_2, S_3, \ldots, S_{p2}$.

Démonstration. — Ayant obtenu comme ci-dessus la congruence fondamentale (2), remplaçons-y successivement k par $1, 2, \ldots, (p-1)$, et ajoutons membre à membre; d'où

$$(5)\qquad S_{p-1}a^{p-1} - \Sigma_1 S_{p-2}a^{p-2} + \Sigma_2 S_{p-3}a^{p-3} - \ldots - \Sigma_{p-2}S_1 a + (p-1)1.2\ldots(p-1) \equiv 0.$$

En vertu du lemme, cette congruence se réduit à

$$(6)\qquad S_{p-1}a^{p-1} - (p-1)! \equiv 0;$$

d'où, pour $a = 1$,

$$(7)\qquad S_{p-1} - (p-1)! \equiv 0.$$

En vertu de (7), la congruence (6) devient

$$(8)\qquad a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est le théorème de Fermat. Inversement, en vertu de (8), les $(p-1)$, termes dont S_{p-1} représente la somme, sont congrus à 1; d'où

$$S_{p-1} \equiv p-1$$

ou

$$(9)\qquad S_{p-1} \equiv -1.$$

Donc (7) devient

$$1 + (p-1)! \equiv 0,$$

ce qui est le *théorème de Wilson*.

Remarque I. — *On déduit également de là sans peine le théorème* A.

En effet, en combinant les congruences (6) et (9), on trouve

$$(10)\qquad a^{p-1} + (p-1)! \equiv 0.$$

Par suite (1) devient une congruence de degré $(p-2)$ en a, qui a $(p-1)$ racines; c'est donc une identité; d'où

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma_2 \equiv \ldots \equiv \Sigma_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Remarque II. — Ce théorème A pourrait aussi être déduit directement du lemme (par exemple au moyen des formules de Newton). Alors, en vertu de ce théorème ainsi démontré, la congruence (1) se réduit à la congruence (10); celle-ci, pour $a=1$, donne le *théorème de Wilson*, lequel, inversement, combiné avec (10), fournit le *théorème de Fermat*.

C'est là encore une autre démonstration des deux théorèmes, mais déjà connue, comme je l'ai vu après coup. Elle est moins simple que les précédentes, puisque, contrairement à celles-ci, elle s'appuie à la fois sur le lemme et sur le théorème A.

TROISIÈME DÉMONSTRATION.

La congruence (2), obtenue comme ci-dessus, peut s'écrire

$$(\mathrm{E}_k)\quad k^{p-1}a^{p-1} - \Sigma_1 k^{p-2}a^{p-2} + \Sigma_2 k^{p-3}a^{p-3} - \ldots - \Sigma_{p-2}ka + \varpi = m_k p,$$

en désignant par ϖ la factorielle $(p-1)!$ et par m_k un certain entier.

En faisant successivement $k=1, 2, \ldots, (p-1)$, nous obtenons $(p-1)$ relations $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_{p-1}$, que nous considérerons comme des équations linéaires fournissant (par la règle de Cramer) les valeurs des $(p-1)$ quantités $a^{p-1}, a^{p-2}, \ldots, a$. Le déterminant D_0 des coefficients de ces quantités peut s'écrire abréviativement :

$$\mathrm{D}(k^{p-1}, -\Sigma_1 k^{p-2}, \Sigma_2 k^{p-3}, \ldots, -\Sigma_{p-2}k),$$

en convenant que les éléments figurant dans la paren-

thèse représentent les éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne du déterminant, et que les 1re, 2e, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ lignes se déduisent de celle-là en y faisant $k=1, 2, \ldots, p-1$. On peut mettre en facteur $-\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, -\Sigma_{p-2}$, ainsi que le nombre 1 dans la 1re ligne, 2 dans la 2e, ..., k dans la $k^{\text{ième}}$, etc...; donc, en tout, le produit $(p-1)!$ Posons

$$(-\Sigma_1)\Sigma_2\ldots(-\Sigma_{p-2}) = \mathrm{S} \qquad \text{ou} \qquad (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\Sigma_1\Sigma_2\ldots\Sigma_{p-3}) = \mathrm{S}.$$

On a

$$\mathrm{D}_0 = \mathrm{S}\varpi\mathrm{V},$$

en désignant par V un déterminant de Vandermonde qu'on peut écrire, suivant notre convention :

$$\mathrm{V} = \mathrm{D}(k^{p-2}, k^{p+3}, \ldots, 1).$$

Quand on remplace dans D_0 les éléments de la première colonne par les seconds membres $(m_k p - \varpi)$ des équations (E_k), on obtient le déterminant

$$\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}(m_k p - \varpi, -\Sigma_1 k^{p-2}, \Sigma_2 k^{p-3}, \ldots, -\Sigma_{p-2} k),$$

et l'on a

$$a^{p-1} = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}_0}.$$

Or, D_1 est évidemment une somme, savoir :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_1 = {} & \mathrm{D}(m_k p, -\Sigma_1 k^{p-2}, \ldots, -\Sigma_{p-2} k) \\ & + \mathrm{D}(-\varpi, -\Sigma_1 k^{p-2}, \ldots, -\Sigma_{p-2} k).\end{aligned}$$

Le premier terme est le produit de $(p\mathrm{S})$ par un certain déterminant D'_1

$$\mathrm{D}'_1 = \mathrm{D}(m_k, k^{p-2}, \ldots, k).$$

Dans le second terme de D_1, faisons passer la première colonne à la droite, ce qui ne fait que multiplier le

déterminant par $(-1)^{p-2}$, et mettons-y encore $(-\varpi S)$ en facteur. Puisque $(-1)^{p-2} = -1$, ce second terme devient finalement $= S\varpi V = D_0$. On a donc

$$D_1 = pS\,D'_1 + D_0;$$

d'où

$$a^{p-1} = 1 + p\frac{SD'_1}{D_0} = 1 + p\frac{D'_1}{\varpi V}.$$

Or, le premier membre est un entier: il en est donc de même du dernier terme; mais ϖ et V sont évidemment premiers avec p; donc D'_1 est divisible par ϖV, ce qui donne le *théorème de Fermat*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Supposons maintenant que les inconnues des $(p-1)$ équations linéaires (E_k) soient les quantités a^{p-2}, a^{p-3}, ..., a, ϖ. Le déterminant Δ_0 de leurs coefficients est

$$\Delta_0 = D(-\Sigma_1 k^{p-2}, -\Sigma_2 k^{p-3}, \ldots, -\Sigma_{p-2} k, 1),$$

ou visiblement $\Delta_0 = SV$.

Remplaçons-y les éléments de la dernière colonne de droite par les termes supposés connus des équations (E_k), savoir $(m_k p - k^{p-1} a^{p-1})$. En tenant compte du théorème de Fermat, ceux-ci deviennent $(m'_k p - 1)$, où m'_k désigne un nouvel entier. On a donc

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= D(-\Sigma_1 k^{p-2}, \ldots -\Sigma_{p-2} k, m'_k p - 1)\\ &= pS\,D(k^{p-2}, \ldots, k, m'_k) - SV,\end{aligned}$$

et ϖ a pour expression

$$\varpi = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = \frac{p}{V} D(k^{p-2}, \ldots, k, m'_k) - 1.$$

On voit comme ci-dessus que V, premier avec p, doit diviser $D(k^{p-2}, \ldots, m'_k)$.

D'où le *théorème de Wilson*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — En tenant compte des deux théorèmes de Fermat et de Wilson, et faisant $a=1$, (E_k) se réduit à

$$-\Sigma_1 k^{p-2}+\Sigma_2 k^{p-3}-\ldots-\Sigma_{p-2} k = M_k p,$$

où M_k désigne un nouvel entier. Ne donnons à k que les valeurs de 1 à $(p-2)$ inclusivement.

Résolvons ce système de $(p-2)$ équations linéaires par rapport à $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-2}$.

Le déterminant de leurs coefficients est

$$T_0 = D(-k^{p-2}, k^{p-3}, \ldots, -k) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \varpi D(k^{p-3}, \ldots, 1);$$

ce dernier déterminant est un déterminant de Vandermonde, dont évidemment aucun facteur n'est divisible par p.

On aura alors

$$\Sigma_n = \frac{T_n}{T_0},$$

en désignant par T_n le déterminant obtenu en remplaçant dans T_0 les coefficients de Σ_n par les seconds $M_k p$. On peut donc mettre p en facteur dans T_n. Puisque T_0 n'est pas divisible par p, on a $\Sigma_n \equiv 0 \pmod{p}$, pour $n=1, 2, \ldots, p-2$. Nous retrouvons ainsi *le théorème* A.

[M¹2a]

ENVELOPPE DES PLANS DES FACES DES HEXAÈDRES DONT LES DIAGONALES SONT PORTÉES PAR DES DROITES DONNÉES;

Par M. G. FONTENÉ.

I.

1. Lemme. — *Étant données dans l'espace quatre droites* α, β, γ, δ *qui forment deux groupes* (α, γ)

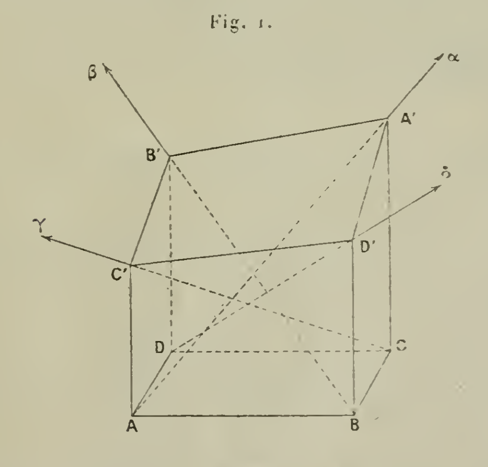
et (β, δ), *si l'on prend sur ces droites quatre points quelconques* A, B. C, D. *on peut se proposer de trouver sur ces mêmes droites quatre points* A′, B′, C′, D′ *tels que les quatre quadrilatères*

(1) A′C.DB′, B′D.AC′, C′A.BD′ D′B.CA′,

qui forment une chaîne, soient des quadrilatères plans; ce problème, qui semble bien posé est généralement impossible. Les quatre points A, B, C, D *doivent vérifier, sur les droites* α, β, γ, δ, *une relation qui est quadratique par rapport à chacun d'eux, et le problème a alors une infinité de solutions.* Si l'on se donne les quatre droites, les chaînes de quadrilatères dont il s'agit dépendent de quatre paramètres, comme si le paradoxe n'avait pas lieu, le paramètre perdu pour les points A, B, C. D se retrouvant pour le point A′.

Dans la figure ci-dessous, on doit supposer ici que

Fig. 1.



les deux quadrilatères ABCD et A′B′C′D′, qui ont pour diagonales AC et BD, A′C′ et B′D′, sont des

quadrilatères gauches. La méthode de correspondance, appliquée à la recherche du point A′ qui réalise les plans (1), montre que le problème est du second degré; or, on en connaît *a priori* deux solutions qu'il faut rejeter : dans l'une, on met A′ en A, C′ en C, les deux premiers plans (1) se confondent avec le plan AC.D qui détermine B′, les deux derniers plans (1) se confondent avec le plan AC.B qui détermine D′; dans l'autre, on met B′ en B, D′ en D .... — Pour voir que la relation entre les points A, B, C, D est quadratique par rapport à chacun de ces points, on se donne les points B et D, le point A, et l'on cherche C; *on peut se donner* A′, *puisque* C *n'en dépend pas;* la méthode de correspondance, appliquée à la recherche du point C qui réalise les plans (1), montre que le problème est du second degré.

2. On supposera ici que la figure représente un hexaèdre, et, pour l'énoncé qui suit, *nous échangerons les notations* B *et* B′, de sorte que les arêtes issues de D seront DA, DB, DC.

Théorème. — *Les hexaèdres, dont les diagonales* AA′, BB′, CC′, DD′ *sont portées par quatre droites données* α, β, γ, δ, *dépendent de deux paramètres; les plans des faces forment trois séries liées aux trois groupements* ($\delta\alpha$, $\beta\gamma$), ($\delta\beta$, $\gamma\alpha$), ... *Si* DA, DB, DC *sont trois arêtes, l'enveloppe des plans* DBA′C *et* D′B′AC′ (diagonales DA′ et BC, D′A et B′C′) *est une surface* S_1 *de huitième classe, ayant comme droites doubles les quatre droites données; les plans* DCB′A *ont de même pour enveloppe une surface* S_2..., *les plans* DAC′B *et* D′A′CB′ *ont pour enveloppe une surface* S_3.... — *La correspondance*

entre les plans de deux faces opposées de l'hexaèdre est du quatrième degré par rapport à chacun d'eux.

Avec les notations de la figure, le plan ABCD dépend de deux paramètres pour que la chaîne de quatre quadrilatères plans du lemme existe, et cette chaîne dépend alors d'un paramètre; on dispose de ce paramètre pour que le quadrilatère A'B'C'D' soit aussi un quadrilatère plan; il reste bien deux paramètres pour l'hexaèdre.

Toujours avec les notations de la figure, les abscisses des points A, B, C, D sur les droites α, β, γ, δ vérifient dans le cas le plus général une relation de la forme

$$Ax^2y^2z^2t^2 + \ldots = 0.$$

Supposons ces points dans un même plan (sans avoir à supposer qu'il en est de même des points A', B', C', D'), et cherchons combien de ces plans passent par une droite donnée Δ, intersection des plans $P = 0$, $Q = 0$. Soit $P + mQ = 0$ l'équation d'un tel plan. La relation entre x et m est doublement linéaire, de même celle entre y et m, ..., et l'on doit avoir

$$x = \frac{am + b}{cm + d}, \qquad y = \frac{fm + g}{hm + k}, \qquad \ldots;$$

on a ainsi l'équation en m

$$A(am + b)^2(fm + g)^2 \ldots + \ldots = 0,$$

qui est du huitième degré.

Si la droite Δ rencontre la droite α en un point A_0, la relation entre x et m prend la forme

$$(x - x_0)(m - m_0) = 0,$$

x_0 correspondant au point A_0, m_0 correspondant au

plan (Δ, α); on a alors

$$x = \frac{x_0(m - m_0)}{m - m_0},$$

et il faut, dans l'équation en m, remplacer $am + b$ par $x_0(m - m_0)$, $cm + d$ par $m - m_0$; cette équation prend la forme

$$(m - m_0)^2[\text{A}x_0^2(fm + g)^2 \ldots + \ldots] = 0:$$

deux des huit plans se confondent avec le plan (Δ, α). Cela montre que la droite α est une droite double de la surface enveloppe, et l'on s'en rend compte aisément : un plan mené par α coupe les droites β, γ, δ en des points B, C, D ; soit A un point de α; en mettant B′ en B, C′ en C, D′ en D, A′ *en un point quelconque de* α, on réalise les quadrilatères plan de l'écriture (1); le plan en question doit être assimilé à un plan tangent à la surface enveloppe.

Par une droite Δ qui remonte deux des quatre droites données, on peut mener quatre plans tangents à chacune des trois surfaces S ; ceci permet de voir que la correspondance entre les plans de deux faces opposées de l'hexaèdre est du quatrième degré par rapport à chacun d'eux. Si l'on se donne, avec la notation transformée, le plan DBA′C tangent à la surface S_1, l'arête DC, par exemple, est déterminée; par cette droite, qui rencontre δ et γ, on peut mener à la surface S_2 quatre plans tangents donnant des quadrilatères DCB′A, et chacun de ceux-ci donne un quadrilatère DAC′B, par suite un plan D′B′AC′. *L'étude de la congruence formée par les droites d'intersection* Δ_1 *des plans des faces opposées* DBA′C *et* D′B′AC′ *serait sans doute assez difficile.*

II.

3. Revenons aux conditions du lemme; mais, au lieu de partir des droites α, β, γ, δ, pour considérer les points A, B, C, D qui donnent la chaîne (1) de quadrilatères plans, partons des points A, B, C, D, non supposés coplanaires, et considérons les droites α, β, γ, δ: la relation entre ces droites est celle-ci : *Les plans* (AC, α), (AC, γ) *et* (BD, β), (BD, δ) *doivent être tels que les rapports anharmoniques des deux faisceaux des plans*

$$AC(B, D, \alpha, \gamma) \quad \text{et} \quad BD(A, C, \beta, \delta)$$

soient inverses.

On peut écrire

$$AC(B, D, \alpha, \gamma) = BD(C, A, \beta, \delta),$$

chacun des deux nombres se déduisant de l'autre par permutation circulaire des lettres.

Les quatre droites AC′, BD′, CA′, DB′ déterminent un quadrilatère gauche MNPQ et l'on est ramené à ceci : *Étant donnés quatre points* A, B, C, D *sur les côtés d'un quadrilatère gauche* MNPQ, *on a*

$$(2) \qquad AC(B, D, PQ, MN) = BD(C, A, QM, NP).$$

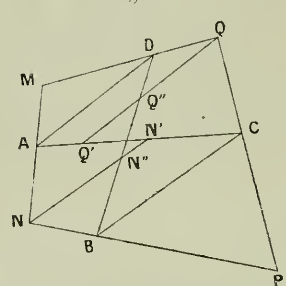
Évaluons le premier rapport anharmonique sur la droite BD, le second sur la droite AC. Menons pour cela (*fig.* 2) les deux droites QQ′Q″ et NN′N″ rencontrant AC et BD. Les plans ACPQ et ACMN, ou ACQQ′ et ACNN′ rencontrent la droite BD aux points Q″ et N″, et le premier des deux rapports anharmoniques ci-dessus est égal à celui-ci : (B, D, Q″, N″); l'autre est de même égal à celui-ci : (C, A, Q′, N′); or chacun de ces deux rapports anharmoniques est égal à

celui des quatre plans

$$QN(BC, DA, Q''Q', N''N').$$

(Ce rapport anharmonique est celui des quatre droites BC, DA, QQ''Q', NN''N', génératrices d'un même système d'un hyperboloïde, puisqu'elles rencontrent les trois droites BD, CA et QN.)

Fig. 2.



Autrement : si l'on prend comme tétraèdre de référence le tétraèdre ABCD, les coordonnées des points M, N, P, Q sont de la forme

$$(a, b, c, d), \quad (ma, b, c, d), \quad (ma, mb, c, d), \quad (ma, mb, mc, d),$$

le point Q ramenant au point M par ma, mb, mc, md; les équations des deux faisceaux de plans (2) sont

$$t = 0, \quad y = 0, \quad \frac{y}{t} = m\frac{b}{d}, \quad \frac{y}{t} = \frac{b}{d}$$

et

$$x = 0, \quad z = 0, \quad \frac{z}{x} = \frac{c}{a}, \quad \frac{z}{x} = \frac{1}{m}\frac{c}{a};$$

les deux rapports anharmoniques ont pour valeur $\frac{1}{m}$.

La droite MN, qui passe en A, perce le plan BCD en un point A_1, ...; on a

$$(A, A_1, M, N) = (B, B_1, N, P) = \ldots = \ldots = m;$$

en effet, les quatre premiers points, par exemple, sont

dans les plans

$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad \frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{x}{y} = m\frac{a}{b}.$$

Lorsque A, B, C, D sont dans un même plan, l'énoncé donné plus haut est illusoire; le suivant convient dans tous les cas : *En divisant d'une part le rapport des distances des points* B *et* D *au plan* (AC, α) *par le rapport analogue pour le plan* (AC, γ), *d'autre part le rapport des distances des points* A *et* C *au plan* (BD, β) *par le rapport analogue pour le plan* (BD, δ), *on doit avoir deux quotients inverses.*

III.

4. Étant données quatre droites dans l'espace, on aurait des faits corrélatifs des précédents : on considérerait en particulier des octaèdres dans lesquels les droites d'intersection des plans des faces opposées seraient les droites en question.

IV.

5. Si les quatre droites α, β, γ, δ sont celles qui portent les côtés d'un quadrilatère gauche, en se donnant à volonté les quatre points A, B, C, D, les chaînes de quadrilatères du lemme donné au début dépendent d'un paramètre : en effet, dans les deux plans (α, β) et (γ, δ), on a deux quadrangles ABA'B' et D'C'DC dont les côtés correspondants doivent se couper sur la droite d'intersection des deux plans : comme cela a lieu pour les côtés AA' et D'D, BB' et C'C, il reste quatre conditions qui se réduisent à trois par un fait d'involution, et, après avoir choisi les points A, B, C, D, on peut mener par AB un plan *quelconque* qui donne les points C' et D', puis le plan BCD' qui donne A', le

plan CDA′ qui donne B′, et le plan DAB′ contient le point C′. — Dans les mêmes conditions, les hexaèdres dont les diagonales sont portées par les quatre droites α, β, γ, δ dépendent de quatre paramètres : trois pour le plan ABCD, un pour le plan ABC′D′; l'existence des trois plans C′D′AB, ABCD, CDA′B assure celle du plan A′B′C′D′.

Ce même système de quatre droites donne lieu à des faits corrélatifs.

V.

6. Le système des quatre droites qui portent les côtés d'un quadrilatère gauche est un cas de dégénérescence de la quartique gauche résultant de l'intersection de deux quartiques. On aurait des faits analogues à ceux du paragraphe IV en substituant une telle courbe au système des quatre droites : la représentation paramétrique au moyen des fonctions elliptiques peut, en effet, se faire de manière que la condition de coplanarité de quatre points de la courbe soit

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0,$$

et, pour le lemme, les quatre conditions relatives aux arguments

$$(a, b, c', d'), \quad (b, c, d', a'), \quad (c, d, a', b'), \quad (d, a, b', c')$$

se réduisent à trois, comme on le voit en additionnant d'une part la première et la troisième, d'autre part la seconde et la quatrième.

Le système des quatre droites qui portent les côtés d'un quadrilatère gauche est aussi bien un cas de dégénérescence de la courbe gauche de quatrième classe dont les plans osculateurs touchent deux quadriques, et une telle courbe donnerait lieu à des faits corrélatifs des précédents.

Il existe, comme on voit, une courbe gauche qui est d'une part l'intersection de deux quadriques, et dont les plans osculateurs sont d'autre part tangents à deux quadriques; son ordre et sa classe sont égaux à 4, son rang est égal à 5. Elle est l'intersection de deux quadriques qui ont en un point un contact d'une nature spéciale, ses plans osculateurs sous les plans tangents communs à deux quadriques ayant également un contact d'une nature spéciale; elle a un point cuspidal et un plan surosculateur. Cayley a montré que les points de la courbe correspondent aux formules

$$\frac{x}{\lambda^4} = \frac{y}{a\lambda^2} = \frac{z}{b\lambda} = \frac{t}{c}$$

(Salmon, *Géométrie analytique à trois dimensions*, t. II, p. 106 de l'édition française); il en résulte que la condition pour quatre points de la courbe d'être dans un même plan se traduit par la relation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

Le plan osculateur au point λ a ses coordonnées données par la formule

$$\frac{u}{\frac{1}{\lambda^4}} = \frac{v}{\frac{-6}{a\lambda^2}} = \frac{w}{\frac{8}{b\lambda}} = \frac{r}{\frac{-3}{c}},$$

de sorte que la condition pour quatre plans osculateurs d'avoir un point commun se traduit par la relation

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots = 0.$$

Nous appellerons cette courbe une *quartique gauche de Cayley*. Elle donne lieu à des faits analogues à ceux du paragraphe IV, et à des faits corrélatifs.

7. Salmon a signalé une quartique gauche différente de celle qui est l'intersection de deux quadriques : *la*

quartique gauche de Salmon est l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique ayant en commun deux droites non situées dans un même plan. Cette courbe est unicursale, mais la condition de coplanarité de quatre points ne peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots = 0$$

que si la courbe se confond avec une quartique gauche de Cayley.

J'observe d'abord que pour une cubique plane à point double représentée paramétriquement, la condition d'alignement de trois points de la courbe est de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \ldots) + C(\lambda_1 + \ldots) + D = 0;$$

si l'on cherche à la mettre sous la forme

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \text{const.},$$

en posant

$$\lambda = m\,\frac{\mu - a}{\mu - b},$$

on trouve d'abord

$$Am^3 + 3Bm^2 + 3Cm + D = 0,$$

puis une condition qui, en tenant compte de la précédente, et après suppression du facteur $a - b$, se réduit à

$$Am^2 + 2Bm + C = 0;$$

l'équation du troisième degré en m doit donc avoir une racine double, c'est-à-dire que parmi les droites qui rencontrent la courbe en trois points confondus, avec même valeur de λ, deux sont confondues : le point double doit être pour cela un point de rebroussement. *La courbe est alors de troisième ordre et de troisième classe, elle a un point de rebroussement et une tangente d'inflexion.*

Pour une quartique gauche de Salmon, la condition

de coplanarité de quatre points de la courbe est

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + B(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \ldots)$$
$$+ C(\lambda_1\lambda_2 + \ldots) + D(\lambda_1 + \ldots) + E = 0;$$

si l'on cherche à la mettre sous la forme

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \text{const.},$$

en posant

$$\lambda = m\,\frac{\mu - a}{\mu - b},$$

on trouve d'abord

$$A\,m^4 + 4\,B\,m^3 + 6\,C\,m^2 + \ldots = 0,$$

puis une condition qui, en tenant compte de la précédente, et après la suppression du facteur $(a - b)^2$, se réduit à

$$A\,m^3 + 3\,B\,m^2 + 3\,C\,m + D = 0,$$

et enfin une condition qui, en tenant compte des précédentes, et après suppression du facteur $(a - b^2)$, se réduit à

$$A\,m^2 + 2\,B\,m + C = 0;$$

l'équation du quatrième degré en m doit donc avoir une racine triple. La courbe est alors une quartique gauche de Cayley.

[H12d][I13bα]

OBSERVATIONS SUR LES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES ENTIERS ET LES SUITES DE FIBONACCI;

Par M. C.-A. LAISANT,

Rédacteur.

I. On sait que les côtés a, b, c d'un triangle rectangle en nombres entiers sont donnés par les

relations

$$a = P^2 - N^2, \qquad b = 2PN, \qquad c = P^2 + N^2,$$

P et N étant deux entiers quelconques. Si P, N sont premiers entre eux et de parité différente, le triangle (a, b, c) est primitif. S'ils sont de même parité, les trois côtés sont pairs, le triangle est non primitif. On doit toujours avoir $P > N$.

En posant $P - N = M$, $P + N = Q$, on obtient la suite de Fibonacci de quatre termes

$$M, \quad N, \quad P, \quad Q,$$

et par suite

$$a = QM, \qquad b = \frac{Q^2 - M^2}{2}, \qquad c = \frac{Q^2 + M^2}{2}.$$

De là

$$M^2 = c - b, \qquad N^2 = \frac{c - a}{2}, \qquad P^2 = \frac{c + a}{2}, \qquad Q^2 = c + b.$$

Si, prolongeant la série, et formant les groupes successifs de quatre termes (MNPQ), (NPQR), ..., on en déduit les triangles correspondants, on en aura une suite indéfinie, dans laquelle deux sur trois seront primitifs, le troisième ayant ses côtés pairs, puisque sur trois termes consécutifs de la suite indéfinie MNPQ, ..., il y en a toujours un qui est pair.

Nous pouvons facilement, qu'ils soient tous deux primitifs ou non, établir entre deux triangles consécutifs des relations qui se déduisent immédiatement de celles qui précèdent. Soit en effet (a', b', c') le triangle qui correspond à la suite NPQR.

Nous aurons

$$N^2 = c' - b', \qquad P^2 = \frac{c' - a'}{2}, \qquad Q^2 = \frac{c' + a'}{2}.$$

Donc

$$c' - b' = \frac{c - a}{2}, \qquad c' - a' = c + a, \qquad \frac{c' + a'}{2} = c + b.$$

ce qui donne

$$a' = b + \frac{c - a}{2}, \qquad b' = a + b + c, \qquad c' = b + \frac{3c + a}{2},$$

et de là

$$\frac{b'}{2} - a' = a - \frac{b}{2}.$$

La différence $a - \frac{b}{2}$ reste donc constante, au signe près; et, par conséquent, les triangles successifs, dont les côtés augmentent indéfiniment, sont tels que le rapport de b à a tend vers 2, quelle que soit la suite MNPQ qui a été employée pour la formation du premier triangle. C'est ce que nous pouvons facilement vérifier sur la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,..., qui nous donne le Tableau ci-dessous :

M.	N.	P.	Q.	a.	b.	c.
1	1	2	3	3	4	5
1	2	3	5	5	12	13
2	3	5	8	16	30	34
3	5	8	13	39	80	89
5	8	13	21	105	208	233
8	13	21	34	272	546	610
13	21	34	55	715	1428	1597
21	34	55	89	1869	3740	4181
...	...	...	...	...	...	...

On peut comparer les valeurs de Q de rangs pairs (5, 13, 34...) avec les valeurs successives des hypoténuses C.

2. A la suite MNPQ, substituons celle-ci après, où les deux premiers éléments M, N sont permutés :

NMPQ. Si (a, b, c) (a', b', c') sont les triangles respectifs correspondants, nous avons

$$M^2 = c - b = \frac{c' - a'}{2}, \qquad N^2 = \frac{c - a}{2} = c' - b',$$
$$P^2 = \frac{c + a}{2} = \frac{c' + a'}{2}.$$

De là

$$a' = \frac{a + 2b - c}{2}, \qquad b' = a - b + c, \qquad c' = \frac{a - 2b + 3c}{2},$$

ou

$$a' = b - \frac{c - a}{2}, \qquad b' = c + a - b, \qquad c' = \frac{a + 3c}{2} - b,$$

et les formules réciproques

$$a = b' - \frac{c' - a'}{2}, \qquad b = c' + a' - b', \qquad c = \frac{a' + 3c'}{2} - b'.$$

Sur les deux groupes (3, 7, 10, 17) et (7, 3, 10, 13) qui donnent respectivement

$$a = 51, \qquad b = 140, \qquad c = 149,$$
$$a' = 91, \qquad b' = 60, \qquad c' = 109,$$

on vérifie sans peine les relations précédentes.

3. Si, à (**MNPQ**), on substitue le groupe commençant par QP, on obtient encore un résultat intéressant; M peut s'écrire $P - N$, et Q, $P + N$. Par suite nous aurons

$$P + N, \quad P, \quad 2P + N, \quad 3P + N,$$
$$a' = 3P^2 + 4PN + N^2, \qquad b' = 4P^2 + 2PN,$$
$$b' - a' = P^2 - N^2 - 2PN = a - b.$$

Les côtés a, b, dans les deux triangles obtenus, ont

donc entre eux même différence en valeur absolue. Et si l'on poursuit indéfiniment l'opération de la même manière, on aura une série de triangles aux côtés de plus en plus grands, et tendant à devenir isoscèles, puisque la différence $a - b$ reste invariable.

Soit, comme exemple, le groupe (5, 4, 9, 13) qui donne $a = 65$, $b = 72$. Si nous formons (13, 9, 22, 31), les côtés correspondants sont $a' = 403$, $b' = 396$.

Comme le second terme 4 du groupe donné est plus petit que le premier 5, on aurait pu obtenir un triangle plus petit, correspondant à (3, 1, 4, 5) et dont les côtés 15, 8 ont encore la même différence 7 que ci-dessus.

Il faut ne pas oublier que cette difference est toujours de la forme $2N^2 - M^2$ en valeur absolue, $c - a$ étant toujours le double d'un carré, et $c - b$ un carré.

La série ordinaire de Fibonacci 1, 2, 3... permet, d'après ce qui précède, de former tous les triangles dans lesquels la différence $a - b$ est égale à l'unité, comme le montre le Tableau suivant :

M.	N.	P.	Q.	*a*.	*b*.	*c*.
1	1	2	3	3	4	5
3	2	5	7	21	20	29
7	5	12	17	119	120	169
17	12	29	41	697	696	985
41	29	70	99	4059	4060	5741
99	70	169	239	23661	23660	33461
...	...	...	...	...	...	...

Les fractions $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ donnent des valeurs de $\sqrt{2}$, avec une approximation sans cesse croissante.

4. Indiquons encore la transformation qui consiste à

substituer au groupe (MNPQ) celui qui commence par PN, c'est-à-dire (PNQN + Q). En considérant les deux triangles (abc) $(a'b'c')$ qu'on obtient, nous aurons

$$N^2 = \frac{c-a}{2} = \frac{c'-a'}{2}, \qquad P^2 = \frac{c+a}{2} = c' - b',$$

$$Q^2 = c + b = \frac{c'+a'}{2};$$

d'où

$$a' = b + \frac{a+c}{2}, \qquad b' = b + c - a, \qquad c' = b + c + \frac{c-a}{2}.$$

Sur l'exemple très simple du groupe (3, 2, 5, 7), qui donne (5, 2, 7, 9) et par conséquent

$$a = 21, \qquad b = 20, \qquad c = 29,$$
$$a' = 45, \qquad b' = 28, \qquad c' = 53,$$

il est aisé de vérifier ces résultats.

En réitérant la transformation, on aurait toujours la même valeur pour N, et par suite on obtiendrait la suite indéfinie des triangles où la différence $c - a$ entre l'hypoténuse et le côté impair est constante, et égale à $2N^2$.

5. Remarquons en terminant, qu'on peut former tous les triangles dans lesquels $c + b$ ou $c - b$ est un carré donné; ou ceux dans lesquels $c + a$ ou $c - a$ est un double carré donné. Les premiers sont en nombre limité, et les autres en nombre infini. Par exemple, pour $c + b = 49$, il n'y a que trois triangles :

M.	N.	P.	Q.	a.	b.	c.
5	1	6	7	35	12	37
3	2	5	7	21	20	29
1	3	4	7	7	24	25

Pour $c - b = 49$, il y en a une infinité, correspondant à $M = 7$:

M.	N.	P.	Q.	a.	b.	c.
7	1	8	9	63	16	65
7	2	9	11	77	36	85
7	3	10	13	91	60	109
7	4	11	15	105	88	137
...	...	...	...	...	...	...

BIBLIOGRAPHIE.

Georges Bouligand. — *Cours de Géométrie analytique.* 1 volume in-8 (22-14) de VII + 421 pages. Paris, Vuibert. Prix : 10fr.

La Géométrie analytique avait pris dans les anciens Cours de Spéciales un développement excessif. Les programmes de 1904 y ont coupé court et c'est heureux. Les « taupins » d'aujourd'hui connaissent les principes de l'Analyse, ils savent intégrer les équations différentielles courantes de la Mécanique et de la Physique, et cela vaut mieux que, par exemple, de savoir former les équations de la directrice d'une section parabolique de quadrique, dans les conditions les plus générales. On a sagement détruit par le fer et par le feu un véritable néoplasme qui s'était greffé sur le corps de la Science.

Mais il est difficile de pratiquer une telle opération sans enlever en même temps un peu de bonne chair, et il faut convenir que la Géométrie tout court a souffert du traitement infligé à la Géométrie analytique. Les élèves d'autrefois n'avaient pas le cerveau chargé que

de science artificielle et sans intérêt. Ils connaissaient les grands principes de la Géométrie projective, la dualité, l'influence des singularités des courbes algébriques sur leur classe, choses d'une grande portée et qu'un mathématicien n'a pas le droit d'ignorer. Il faut ajouter que l'ancien programme favorisait remarquablement le travail personnel, parce qu'on y trouvait une mine inépuisable de problèmes sur lesquels les élèves pouvaient exercer leur sagacité et même leur esprit d'invention, mieux que sur les problèmes qu'il est possible de donner aujourd'hui, le programme actuel ne comportant guère que des applications immédiates du cours.

Le Livre de M. Bouligand marque un retour à la culture de la Géométrie. Il ne vise certes pas à restaurer les terribles « double X » et « triple X » d'autrefois, mais il voudrait en sauver ce qui s'y trouvait de bon. Comme le dit M. E. Cartan dans l'intéressante Préface qu'il a écrite pour ce Livre, « le but qu'a poursuivi l'Auteur est de former l'esprit de l'élève et de se servir des matières à enseigner pour l'aider à acquérir une culture mathématique proprement dite ».

Suivant la tendance moderne, M. Bouligand mène de front l'étude de la Géométrie plane et celle de l'espace, ce qui économise les démonstrations. Il introduit le plus tôt possible les notions d'éléments à l'infini et d'éléments imaginaires, préparant ainsi dès le début le lecteur à une conception large de la Géométrie.

Les propriétés fondamentales des courbes algébriques (points multiples, points à l'infini, points communs à deux courbes) sont exposées avec beaucoup de soin. On sait combien il est délicat, par exemple, d'établir dans toute sa généralité le théorème d'après lequel deux courbes d'ordres m et p ont mp points communs,

L'Auteur y parvient de la manière la plus heureuse.

Après un chapitre substantiel sur les transformations, l'homographie, on passe à l'étude de la corrélation, et le lecteur se trouve dès lors en possession des principes que dominent la Géométrie depuis Poncelet, Chasles et Plucker. Puis viennent les coniques, les quadriques, l'étude de la courbure des lignes tracées sur les surfaces.

L'Ouvrage se termine par des compléments suggestifs, en particulier la note sur les invariants, où l'on trouve vraiment tout ce qu'il y a de fondamental à savoir sur le sujet. Il y a, dans ce résumé, des choses essentielles que l'on chercherait vainement dans certains ouvrages touffus, par exemple le fait qu'un système de deux coniques a *deux* invariants projectifs absolus.

La rédaction de l'Auteur est à la fois claire et concise. Il lui arrive souvent de laisser le soin d'achever les démonstrations à l'élève, à qui il demande ainsi une véritable collaboration. Peut-être M. Bouligand aurait-il pu augmenter le nombre des exercices, mais peut-être aussi se propose-t-il d'en publier un recueil spécial.

En somme, un Livre bien fait, original en plusieurs points, dont la lecture paraît propre à stimuler l'instinct géométrique, un peu engourdi par le temps qui court.

R. B.

QUESTIONS.

2424. Dans un plan, deux courbes de grandeurs invariables roulent respectivement sur deux courbes fixes, et cela de manière à se couper sous un angle constant.

Démontrer que la normale à la courbe décrite par leur point

d'intersection concourt avec les droites joignant leurs centres de courbure en ce point respectivement à leurs points de contact avec les courbes fixes. R. B.

2425. Sur les arètes Ox et Oy d'un trièdre on marque deux points fixes A et B, sur l'arète Oz un point variable C. Lieux des contacts, sur la face OAB, des sphères tangentes aux quatre plans déterminés par les faces du tétraèdre OABC.

V. Thébault.

2426. Soient un triangle ABC et un cercle (Σ) de son plan. On trace les cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) passant respectivement en A, B, C, et ayant BC, CA, AB, pour axes radicaux avec (Σ). Montrer que :

1° Le centre radical de ces cercles est le pôle de l'axe radical Δ de (Σ) et du cercle circonscrit à ABC, par rapport au triangle ABC.

2° Les distances de ce centre radical aux côtés du triangle sont inversement proportionnelles aux produits des côtés par les puissances des sommets opposés par rapport à (Σ).

— Cas particulier où (Σ) est un des cercles tritangents.

V. Thébault.

2427. Soient ABCD un quadrilatère inscriptible dans un cercle Q, M et N les extrémités du diamètre parallèle à la droite de Simson du point D par rapport au triangle ABC. Démontrer que les droites de Simson des points M et N par rapport au triangle ABC sont parallèles aux axes des paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD.

Serban A. Gheorghère.

[M¹4f]

CYCLIDES DU QUATRIÈME DEGRÉ;

Par M. R. DONTOT.

1. Nous rappellerons d'abord quelques résultats connus (*voir* Darboux, *Géométrie analytique*, p. 410 et suiv.). Une cyclide rapportée à ses axes

$$(x^2+y^2+z^2)^2+4Ax^2+4A'y^2+4A''z^2 \\ +8Cx+8C'y+8C''z+4D=0$$

est, en général, de cinq manières différentes, l'enveloppe de sphères bitangentes dont le centre décrit une quadrique à centre, la déférente, et qui demeurent orthogonales à une sphère directrice fixe. Cette sphère a pour équation

$$x^2+y^2+z^2-2P=0 \qquad (P=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta),$$

α, β, γ, δ étant liés par les relations

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{\lambda-A}+\dfrac{\beta^2}{\lambda-A'}+\dfrac{\gamma^2}{\lambda-A''}-1=0, \\ \dfrac{C\alpha}{\lambda-A}+\dfrac{C'\beta}{\lambda-A'}+\dfrac{C''\gamma}{\lambda-A''}+\lambda+\delta=0, \end{cases}$$

λ étant une des cinq racines de l'équation

$$\text{(I bis)} \quad \frac{C^2}{\lambda-A}+\frac{C'^2}{\lambda-A'}+\frac{C''^2}{\lambda-A''}+D-\lambda^2=f(\lambda)=0.$$

L'ensemble des plans des deux courbes planes suivant

lesquelles la sphère coupe la cyclide est donné par

$$\pi(xyz) = 0,$$

$$\begin{aligned}\pi(xyz) = P^2 + 2\lambda P + (A-\lambda)x^2 + (A'-\lambda)y^2 + (A''-\lambda)z^2 \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D,\end{aligned}$$

λ ayant une des valeurs précédentes.

Les résultats précédents ne sont pas tout à fait généraux : il peut arriver en effet que $\lambda - A$ soit nul : un calcul élémentaire conduit alors aux conditions

$$\lambda = A, \qquad C = 0, \qquad \alpha = 0,$$

$$(\text{II}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{C'\beta}{A-A'} + \frac{C''\gamma}{A-A''} + A + \delta\right)^2 \\ &-\left(\frac{C'^2}{A-A'} + \frac{C''^2}{A-A''} + D - A^2\right) \\ &\qquad \times \left(\frac{\beta^2}{A-A'} + \frac{\gamma^2}{A-A''} - 1\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

ou, dans le cas où $A = A'$, aux conditions

$$\lambda = A = A', \qquad C = 0, \qquad \alpha = 0,$$

$$(\text{II } bis) \quad \left\{ \begin{aligned} &2C'\beta\left(\frac{C''\gamma}{A-A''} + A + \delta\right) - C'^2\left(\frac{\gamma^2}{A-A''} - 1\right) \\ &\qquad - \beta^2\left(\frac{C''^2}{A-A''} + D - A^2\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

2. La sphère bitangente peut, dans certaines hypothèses, devenir sphère inscrite. Il est bien évident qu'il importe, si l'on veut faire une théorie complète des cyclides, de connaître dans quel cas il en est ainsi. On trouve par un calcul élémentaire les conditions suivantes :

$$(\text{III}) \quad \left\{ \begin{aligned} &C = 0, \qquad \frac{C'^2}{A-A'} + \frac{C''^2}{A-A''} + D - A^2 = 0, \\ &\lambda = A, \qquad \alpha = 0, \qquad \frac{\beta^2}{A-A'} + \frac{\gamma^2}{A-A''} - 1 = 0, \\ &\frac{C'\beta}{A-A'} + \frac{C''\gamma}{A-A''} + A + \delta = 0, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(\mathrm{IV})\quad\left\{\begin{aligned}&C = C' = 0, \qquad A = A' = \lambda, \qquad \alpha = 0. \qquad \beta = 0,\\&\left(\frac{C''\gamma}{A - A''} + A + \delta\right)^2\\&\quad - \left(\frac{\gamma^2}{A - A''} - 1\right)\left(\frac{C''^2}{A - A''} + D - A^2\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(\mathrm{IV}\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}&C = C' = 0, \qquad A = A' = A'', \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0,\\&2C''\gamma(A + \delta) - \gamma^2(D - A^2) + C''^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour n'être pas obligé de revenir sur ces distinctions, remarquons qu'il est inutile de supposer $A = A' = A''$, $C = C' = C'' = 0$, cas où la cyclide se décompose en deux sphères concentriques et que, par un changement d'axes évident, on ramène les hypothèses $A = A'$ ou $A = A' = A''$ aux hypothèses envisagées

$$(A = A', \quad C = 0) \qquad \text{ou} \qquad (A = A' = A'', \quad C = C' = 0).$$

L'interprétation des résultats précédents est simple.

Conditions (II) *et* (II *bis*). — La déférente et la sphère directrice sont réduites au même plan. Les sphères variables sont orthogonales à ce plan : leur rayon varie suivant une loi peu simple.

Conditions (III). — La déférente est une conique. La cyclide est l'enveloppe de sphères dont le centre décrit la conique déférente et qui sont orthogonales à un cercle du plan de cette déférente, ou, si l'on veut, à une infinité de sphères directrices appartenant à un réseau linéaire (dont fait partie évidemment le plan de la déférente). Ce cercle, commun à toutes ces sphères directrices, est dit *cercle directeur*.

Conditions (IV) *et* (IV *bis*). — La cyclide est l'en-

veloppe de sphères dont les centres sont alignés : elle est manifestement de révolution.

3. La cyclide apparaît donc suivant les cas comme une enveloppe de sphères dont l'équation dépend de deux ou un paramètre. Nous désignerons par *normaux* les systèmes de sphères bitangentes, par *exceptionnels* les systèmes de sphères inscrites, par *réguliers* les systèmes de sphères, dont le centre ne décrit ni un plan ni une droite, par *singuliers* les autres.

Le nombre et la nature des systèmes de sphères bitangentes ou inscrites dépend de la nature des racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - A)(\lambda - A')(\lambda - A'')f(\lambda).$$

Cette équation a cinq racines, nous nous proposons d'établir d'abord que ces racines, en général, sont distinctes.

Cherchons, en effet, les points singuliers de la surface, autres, bien entendu, que les points de l'ombilicale. Ils sont définis par

$$\begin{gathered}
x(x^2 + y^2 + z^2) + 2A\,x + 2C = 0, \\
y(x^2 + y^2 + z^2) + 2A'y + 2C' = 0, \\
z(x^2 + y^2 + z^2) + 2A''z + 2C'' = 0, \\
Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 3(Cx + C'y + C''z) + 2D = 0,
\end{gathered}$$

système qu'on résout si $CC'C'' \neq 0$ en posant

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda = 0,$$

d'où

$$x = \frac{C}{\lambda - A}, \qquad y = \frac{C'}{\lambda - A'}, \qquad z = \frac{C''}{\lambda - A''},$$

λ vérifiant les deux équations

$$f(\lambda) = 0, \qquad f'(\lambda) = 0.$$

Si $C = 0$ par exemple, outre la solution précédente, on trouve *celles* qui sont définies par

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2A = 0,$$
$$y = \frac{C'}{A - A'}, \qquad z = \frac{C''}{A - A''},$$
$$f(A) = 0.$$

On voit donc qu'à toute racine multiple et différente de A, A', A'' de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ correspond un et un seul point singulier de la surface : à toute racine A, A', A'' de $\varphi(\lambda) = 0$ qui est en même temps racine de $f(\lambda) = 0$, c'est-à-dire au moins racine double de $\varphi(\lambda) = 0$, correspondent deux points singuliers distincts, si, par exemple,

$$\frac{C'^2}{(A - A')^2} + \frac{C''^2}{(A - A'')^2} + 2A \neq 0,$$

c'est-à-dire si la racine A, A' ou A'' de $\varphi(\lambda)$ est racine *simple* de $f(\lambda) = 0$.

Il est possible de préciser la nature du point singulier : supposons que λ soit une racine double de $f(\lambda) = 0$. L'équation du cône des tangentes, rapportée à deux axes passant par le point singulier, sera

$$\left[\frac{Cx}{(\lambda - A)^2} + \frac{C'y}{(\lambda - A')^2} + \frac{C''z}{(\lambda - A'')^2}\right]^2$$
$$+ (A - \lambda)x^2 + (A' - \lambda)y^2 + (A'' - \lambda)z^2 = 0.$$

On a donc un véritable cône si

$$\frac{C^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{C'^2}{(\lambda - A')^3} + \frac{C''^2}{(\lambda - A'')^3} - 1 \neq 0,$$

c'est-à-dire si $f''(\lambda) \neq 0$. La racine λ est alors une racine double et la surface correspondante, l'inverse d'une quadrique à centre. Si, au contraire, λ est une racine triple, il y a au point singulier deux plans tangents, la cyclide est l'inverse d'une quadrique à plans

directeurs. Si $C = 0$, on trouve pour cône des tangentes

$$\left[x\sqrt{f'(\Lambda)} + y\,\frac{C'}{\Lambda - \Lambda'} + z\,\frac{C''}{\Lambda - \Lambda''}\right]^2 + (\Lambda' - \Lambda)y^2 + (\Lambda'' - \Lambda)z^2 = 0,$$

qui est un véritable cône dans le cas où Λ n'est pas racine double de $f(\lambda) = 0$, c'est-à-dire encore lorsque les deux points singuliers correspondant à Λ sont distincts. Dans ce cas, la cyclide est l'inverse d'un cône.

On voit donc qu'à tout point singulier de la surface correspond une racine au moins double pour l'équation $\varphi(\lambda) = 0$. Dans le cas général, la cyclide n'a pas de points singuliers et l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ a cinq racines distinctes.

On remarquera qu'une enveloppe de sphères inscrites a deux points singuliers : une cyclide de Dupin, enveloppe de sphères inscrites de deux façons différentes, en a quatre *et que les réciproques sont vraies.*

4. Il est maintenant suffisamment établi que l'étude et la solution si possible de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ doivent précéder toute étude d'une cyclide donnée. Supposons donc C, C', C'' différents de 0, par suite $\Lambda \neq \Lambda' \neq \Lambda''$ et pour fixer les idées $\Lambda < \Lambda' < \Lambda''$. L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ a cinq racines, dont trois sont réelles et distinctes, auxquelles correspondent trois systèmes normaux réguliers de sphères bitangentes : les déférentes sont trois quadriques homofocales à centre (un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes). Si la cyclide n'a pas de points doubles (en dehors de l'ombilicale), il y a en outre deux systèmes de sphères normaux réguliers : s'il y a un point double, il n'y a qu'un seul système normal régulier de plus.

Rappelons que les centres des sphères directrices

sont suivant les cas cinq points distincts O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, dont trois sont réels, au moins, ou cinq points dont trois sont distincts, et distincts du point double, et les deux autres confondus avec le point double. La directrice ayant pour centre le point double est de rayon nul; toutes les sphères directrices passent donc par ce point; la cyclide est de trois façons différentes podaire d'une quadrique à centre. Ces trois quadriques à centre, homothétiques des déférentes, sont homofocales.

Dans l'un et l'autre cas, quatre quelconques des points O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 forment un tétraèdre conjugué à la directrice dont le cinquième est le centre et à la déférente correspondante. Du nombre de cônes distincts passant par l'intersection d'une déférente et de la directrice correspondante, on déduit aisément que les focales de la cyclide sont dans un cas [pas de racines doubles pour $\varphi(\lambda) = 0$] cinq biquadratiques sphériques sans point double; dans le second [$\varphi(\lambda)$ a une racine double], quatre biquadratiques ayant au point double de la cyclide un point double, l'une d'elles étant tracée sur un cône isotrope.

Il est même aisé de montrer, comment la connaissance des racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ permet de former effectivement l'équation des cônes passant par une focale. Prenons par exemple la focale tracée sur la directrice O_1, correspondant à la racine λ_1 : soit λ_2 une racine différente de λ_1.

L'un des cônes cherché a pour équation

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\frac{x^2}{\lambda_1 - A} + \frac{y^2}{\lambda_1 - A'} + \frac{z^2}{\lambda_1 - A''} - 1\right)$$
$$+ x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{Cx}{\lambda_1 - A} - 2\frac{C'y}{\lambda_1 - A'} - 2\frac{C''z}{\lambda_1 - A''} - 2\lambda_1 = 0.$$

La vérification est aisée.

5. Le cas où l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admet une ou plusieurs racines *simples* A, A' ou A'' ne se différentie pas essentiellement du précédent. A chacune de ces racines correspond une série de sphères normale singulière; une déférente disparaît, une directrice devient plane et les foyers correspondants sont sur une quartique bicirculaire. On voit que les quartiques bicirculaires remplacent les biquadratiques sphériques dans les cas de dégénérescence de la sphère qui les porte, ce qui n'a rien de surprenant. En particulier, les focales d'une quartique bicirculaire sont, en général, quatre biquadratiques sphériques tracées sur des sphères orthogonales deux à deux et orthogonales au plan de cette quartique.

Supposons alors que C étant nul, C' et C'' soient différents de 0. Supposons en outre que $f(A)$ soit nul. Si $A < A' < A''$, la racine A est simple ou double pour $f(\lambda) = 0$ et, par suite, $\varphi(\lambda) = 0$ admet cinq racines réelles, savoir : A, racine double et trois racines distinctes entre elles λ_1, λ_2, λ_3, λ_1 pouvant être égal à A. La cyclide admet un plan de symétrie, deux points singuliers distincts ou un point singulier avec en ce point deux plans tangents; dans le premier cas, on compte trois systèmes normaux et un système exceptionnel de sphères bitangentes; dans le second, deux systèmes normaux et un système exceptionnel. (Parmi les déférentes il y a un hyperboloïde à deux nappes, un ellipsoïde et une ellipse imaginaire.) Les déférentes sont homofocales; les sphères directrices du système exceptionnel sont les sphères du faisceau linéaire

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\mu x - 2\frac{C'}{A - A'}y - 2\frac{C''}{A - A''}z - 2A = 0.$$

Elles sont orthogonales aux sphères directrices des

systèmes normaux : nous allons établir que, comme dans le cas général (§ 4), les centres de ces sphères sont les sommets d'un triangle conjugué commun à toutes les directrices du système exceptionnel, et à la déférente de ce système.

Les coniques

$$(\lambda - A)\left(\frac{y^2}{A - A'} + \frac{z^2}{A - A''} - 1\right)$$
$$+ y^2 + z^2 - 2\,\frac{C'y}{A - A'} - 2\,\frac{C''z}{A - A''} - 2A = 0,$$

où λ prend celles des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ différentes de A, sont des systèmes de droites dont le centre a pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = \frac{C'}{\lambda - A'}, \qquad z = \frac{C''}{\lambda - A''},$$

c'est-à-dire le centre des sphères directrices des systèmes normaux. D'autre part, l'équation d'un cône passant par une focale de l'un de ces systèmes serait

$$(\lambda - \lambda_3)\left(\frac{x^2}{\lambda_3 - A} + \frac{y^2}{\lambda_3 - A'} + \frac{z^2}{\lambda_3 - A''} - 1\right)$$
$$+ x^2 + y^2 + z^2 - 2\,\frac{C'}{\lambda_3 - A'}\,y - 2\,\frac{C''}{\lambda_3 - A''}\,z - 2\lambda_3 = 0,$$

où λ peut avoir l'une des valeurs A, λ_1, λ_2. Si $\lambda = \lambda_1$ ou λ_2, le sommet de ce cône est encore un des centres d'une sphère directrice des systèmes normaux; mais si $\lambda = A$, il y a une infinité de sommets, le cône se réduisant à un système de deux plans. On peut donc dire, d'une façon très générale, que les centres des sphères directrices n'appartenant pas à un système sont les pôles doubles de la déférente et de la directrice de ce système (ou des directrices de ce système). Enfin, on voit que les déférentes des systèmes normaux sont

bitangentes aux points doubles à leurs directrices et que les focales de ces systèmes sont composées chacune de deux cercles.

Le système exceptionnel a quatre foyers distincts en général, puisque les trois systèmes de sécantes sont en général distincts.

On modifie sans peine ces résultats dans le cas où les points doubles de la cyclide sont confondus.

6. Nous avons supposé que A était la plus petite des trois quantités A, A′, A″ : il y a de très légères modifications à apporter aux parties du texte mises entre parenthèses, s'il n'en est pas ainsi. Il en est de même, si l'une des déférentes se réduit à un plan : ces variantes sont sans intérêt.

Supposons donc

$$C = C' = o, \qquad C'' \neq o, \qquad A \neq A' \qquad \text{et} \qquad f(A) = f(A') = o,$$

$$\begin{matrix} C = o \\ C' = o \end{matrix}, \qquad \frac{C''^2}{A - A''} + D - A^2 = o, \qquad \frac{C''^2}{A' - A''} + D - A'^2 = o.$$

La cyclide admet deux systèmes exceptionnels, un système normal, c'est une cyclide de Dupin à ligne de courbures planes. Elle a quatre points singuliers définis par les équations :

$$\left\{ \begin{aligned} & x^2 + \frac{C''^2}{(A - A'')^2} + 2A = o, \\ & y = o, \\ & z = \frac{C''}{A - A''}, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} & x = o, \\ & y^2 + \frac{C''^2}{(A' - A'')^2} + 2A' = o, \\ & z = \frac{C''^2}{A' - A''}. \end{aligned} \right.$$

Ces points singuliers forment deux groupes et tout point d'un groupe est le sommet d'un cône isotrope passant par les deux points singuliers de l'autre groupe. La sphère directrice du système normal passe par ces

quatre points. En effet, son équation

$$x^2+y^2+z^2-2\frac{C''z}{\lambda_1-A''}-2\lambda_1=0$$

est vérifiée, par exemple, pour

$$y=0,\qquad x^2+z^2=-2A,\qquad z=\frac{C''}{A-A''},$$

car on a

$$+\frac{C''2}{(\lambda_1-A'')(A-A'')}+\lambda_1+A=\frac{f(\lambda_1)-f(A)}{A-\lambda_1}$$
$$(\lambda_1-A\neq 0).$$

Elle est donc encore normale à toutes les sphères directrices en nombre doublement infini des deux systèmes exceptionnels. La focale de ce système appartient au faisceau des quadriques

$$(\lambda-\lambda_1)\left(\frac{x^2}{\lambda_1-A}+\frac{y_2}{\lambda_1-A'}+\frac{z^2}{\lambda_1-A''}-1\right)$$
$$+x^2+y^2+z^2-2\frac{C''z}{\lambda_1-A''}-2\lambda_1=0,$$

qui se décomposent en systèmes de plan pour $\lambda=A$, $\lambda=A''$. Par suite, la déférence coupe la directrice suivant quatre droites, isotropes naturellement.

On vérifierait très simplement que les déférentes des systèmes exceptionnels sont bitangentes aux sphères directrices correspondant aux points doubles. Il suffit pour cela de former les équations des sécantes communes.

Nous laissons au lecteur le soin de compléter cette étude par celle des cas simples

$$C=0,\qquad C'=0,\qquad A=A'.$$
$$C=0,\qquad C'=0,\qquad A=A'=A''.$$

7. Les réciproques des propositions précédemment établies sont évidentes.

L'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une quadrique à centre et qui demeure orthogonale à une directrice fixe est une cyclide du quatrième degré, ayant autant de points doubles que la déférente et la directrice ont de points de contacts. En particulier, si la déférente et la directrice sont bitangentes en deux ombilics, l'enveloppe est une cyclide de Dupin.

Nous désignerons par cyclides (Σ) celles qui admettent au moins un système exceptionnel de sphères enveloppes : autrement dit, celles qui ont deux ou quatre points doubles, ou encore qui correspondent à des déférentes bitangentes, tangentes en un ou deux ombilics à leurs directrices. Ces cyclides sont des enveloppes de sphères (S) dont l'équation dépend d'un paramètre au second degré : cela d'une ou deux manières différentes. Soient

$$S_1 = a_1(x^2+y^2+z^2)+2b_1x+2c_1y+2d_1z+e_1=0,$$
$$S_2 = a_2(x^2+y^2+z^2)+2b_2x+2c_2y+2d_2z+e_2=0,$$
$$S_3 = a_3(x^2+y^2+z^2)+2b_3x+2c_3y+2d_3z+e_3=0$$

les équations de trois sphères. Les sphères S seront données par

$$S_1\theta^2+2S_2\theta+S_3=0,$$

où θ représente un paramètre variable, et leur enveloppe sera la cyclide d'équation

$$S_2^2=S_1S_3.$$

Soit θ_1 une valeur de θ : désignons par P_1 la puissance d'un point M de la cyclide, par rapport à la sphère θ_1

$$P_1(a_1\theta_1^2+2a_2\theta_2+a_3)=S_1\theta_1^2+2S_2\theta+S_3$$
$$=\frac{1}{S_1}(S_1\theta_1+S_2)^2.$$

Soit ρ_1 le rayon de la sphère θ_1 : désignons par $+d_1^2$ ou $-d_1^2$ suivant le cas, la quantité $\frac{P_1}{2\rho_1}$

$$d_1^2 = \left|\frac{P_1}{2\rho_1}\right|,$$

nous pourrons appeler distance d'un point à la sphère θ_1, un nombre positif dont la valeur est d_1 : cette définition est légitime, car pour une sphère θ_1 réduite à un plan, la formule donne la distance géométrique du point M à ce plan. Nous aurons alors

$$\pm 2\rho_1 d_1^2 (a_1\theta_1^2 + 2a_2\theta_2 + a_3) S_1 = (S_1\theta_1 + S_2)^2.$$

Pour fixer les idées, supposons le point M choisi sur une région de surface, ou $S_1 > 0$, on aura

$$\pm d_1 \sqrt{\pm 2\rho_1 (a_1\theta_1^2 + 2a_2\theta_2 + a_3)}\sqrt{S_1} = S_1\theta_1 + S_2.$$

Nous choisirons le signe, suivant le cas; pour simplifier l'exposé, imaginons qu'il convienne de prendre le signe $+$ quel que soit θ_1. Il est manifeste qu'entre les distances d_1, d_2, d_3 à trois sphères θ_1, θ_2, θ_3 existera une relation linéaire et homogène

$$\begin{vmatrix} d_1\sqrt{2\rho_1(a_1\theta_1^2 + 2a_2\theta_2 + a_3)} & \theta_1 & 1 \\ d_2\sqrt{2\rho_2(a_1\theta_2^2 + 2a_2\theta_2 + a_3)} & \theta_2 & 1 \\ d_3\sqrt{2\rho_3(a_1\theta_3^2 + 2a_2\theta_3 + a_3)} & \theta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les cyclides (Σ) peuvent être divisées en zones telles que chacune d'elles soit le lieu géométrique des points dont les distances à trois sphères inscrites sont liées par une même relation linéaire et homogène.

En particulier, si parmi les sphères Σ il y a trois sphères points distinctes, la cyclide Σ apparaît comme formée de zones, telles que chacune d'elles soit le lieu

des points dont les distances à trois points appelés foyers sont liées par une même relation linéaire et homogène.

Les réciproques sont vraies.

8. Il n'y a aucune modification à faire aux calculs et raisonnements précédents pour parfaire l'étude des quartiques bicirculaires. Chaque quartique bicirculaire a dans son plan quatre déférentes homofocales et quatre cercles directeurs orthogonaux, distincts si la quartique n'a pas de points doubles en dehors des points cycliques : dans ce cas, les foyers sont au nombre de 16. Soient A, B, C, D quatre foyers d'un même système : ils sont sur un même cercle directeur O_1, les points de rencontre O_2, O_3, O_4 des sécantes AB, CD : AC, BD : AD, BC sont les centres des cercles directeurs des autres systèmes. Les trois systèmes de sécantes étant distincts (même démonstration qu'au paragraphe 4), les quatre foyers A, B, C, D sont distincts sur un même cercle et par suite les seize foyers sont distincts entre eux. En effet, si A du système O_1 était confondu avec A' du système O_2, le point A serait sur les deux cercles orthogonaux O_1 et O_2 et par suite il ne serait pas distinct de B, C, D.

Il est aisé d'ailleurs de construire ces seize foyers à partir de quatre d'entre eux : Supposons que deux des cercles directeurs se coupent en un point réel A, une inversion de centre A transforme la quartique en une quartique d'équation

$$(x^2+y^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4D = 0.$$

Les foyers situés sur l'axe des x ont pour abscisses les racines de l'équation

$$\frac{x^4}{4} + x^2\,\frac{D - AA}{A - A'} + D = 0$$

et les foyers situés sur l'axe des y ont pour ordonnées les racines de

$$\frac{y^4}{4} + y^2 \frac{D - AA'}{A' - A} + D = 0.$$

Les uns sont donc les foyers des couples formés par les autres convenablement associés : par exemple, aux foyers x_1, $-x_1$ correspondent $y_1 = ix_1$, $y_2 = -ix_1$. Revenons à la cyclide primitive redonnée par une nouvelle inversion : les douze foyers autres que A, B, C, D sont les foyers des six systèmes de points ou les points limites des six systèmes de cercles [A, B; C, D] [A, C; B, D] [A, D; B, C]. Ces quartiques, sans points doubles, ayant quatre foyers distincts, sont de quatre façons des enveloppes de cercles et par suite :

Toute quartique bicirculaire sans points doubles est formée d'arcs, dont chacun est le lieu géométrique des points dont les distances à trois foyers sont liées par une relation linéaire et homogène.

Cette propriété se conservant par inversion, la définition des quartiques bicirculaires dans le plan s'applique mot pour mot aux biquadratiques sphériques sur la sphère.

Toute biquadratique sphérique sans points doubles est formée d'arcs, dont chacun est le lieu géométrique des points dont les distances à trois points fixes de la sphère appelés foyers sont liées par une relation linéaire et homogène.

Ces trois points sont trois des quatre points où une des focales de la biquadratique sphérique donnée perce la sphère qui la porte.

9. Cette dernière remarque fort simple permet de résoudre un important problème, déjà traité par Laguerre et Darboux (DARBOUX, *Analytique*, p. 458-459) :

Connaissant un mode de génération d'une cyclide, trouver les autres.

Le problème ainsi posé en masque un autre :

Connaissant une des focales d'une cyclide, trouver les autres,

qu'il nous semble préférable de résoudre d'abord, pour montrer combien le rôle de la déférente est en somme peu important quand la focale est déterminée. La solution du problème posé et résolu par Darboux et Laguerre découle naturellement de la solution de celui-ci.

Soit (F_1) la focale donnée tracée sur une sphère (O_1) ; soient O_2 le sommet d'un des cônes passant par F_1, (O_2) la sphère orthogonale à (O_1) de centre O_2 : O_2 est une directrice. Elle coupe (F_1) en quatre points A, B, C, D qui sont les foyers de la focale (F_2) cherchée tracée sur (O_2). Cette focale est parfaitement déterminée : chacun de ses points est à des distances de A, B, C, liées par une relation linéaire et homogène ; elle passe en outre par les foyers de (F_1) situés sur (O_1), foyers qu'il est aisé de déterminer. Ce sont par exemple les points de contact des plans tangents à la sphère (O_1) et au cône de sommet O_2 passant par la biquadrique. Elle est donc parfaitement déterminée, comme lieu géométrique de points dont les distances à A, B, C sont liées par une relation connue.

Pour rendre maniable cette solution, projetons stéréographiquement chaque biquadrique, d'un point de vue différent, bien entendu, sur le plan radical de deux sphères : nous obtenons deux quartiques bicirculaires ayant même cercle directeur et telles que sur ce cercle les foyers de l'une soient les points de rencontre avec ce cercle de la seconde. Définissons, par exemple, la première par sa déférente qui passe par les quatre

foyers A, B, C, D : soient ma une tangente commune à la directrice et a cette déférente ; le cercle de centre m (m sur la déférente) et de rayon ma (a sur la directrice) est un cercle enveloppant, le point de contact est a ; a est donc un point d'intersection de la directrice avec la cyclide. Autrement dit, la cyclide ayant pour foyer a, et les points b, c, d obtenus de même et passant par A, B, C, D, s'obtient en prenant pour déférente la polaire réciproque par rapport au cercle directeur de la déférente donnée. La biquadratique sphérique s'en déduit par projection.

Sous cette forme, la solution est générale et s'applique, A, B, C, D étant ou non réels ou distincts.

10. Pour ne pas allonger indéfiniment le texte du présent article, nous avons borné notre étude aux cyclides du quatrième degré. Il est manifeste que les résultats géométriques obtenus s'appliquent également aux cyclides du troisième degré ; les déférentes sont des paraboloïdes. Parmi ces cyclides, il y a des enveloppes de sphères dont le centre décrit une parabole, ce sont des cyclides (Σ).

La distinction entre cyclides (Σ) et autres présente une grande importance. La propriété capitale des cyclides est celle-ci :

Les cyclides homofocales forment un système triple orthogonal.

Elle est connue depuis longtemps, mais sa démonstration même indique manifestement que les cyclides dont il s'agit ne sont pas des cyclides (Σ). Par un point de l'espace passent deux (et non trois) cyclides Σ homofocales, de foyers donnés, si parmi ces foyers trois sont distincts, une seule s'il n'en est pas ainsi, et c'est une cyclide de Dupin.

[O¹2e, T2b]

THÉORÈME SUR LES COURBES PLANES;

PAR M. RAOUL BRICARD.

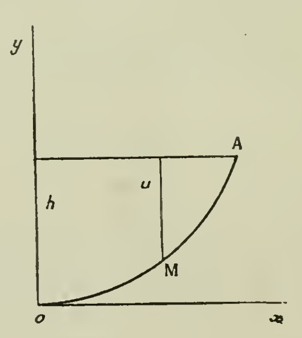
Soit OA un arc de courbe plane, convexe et tel que les tangentes en O et A, orientées suivant un sens de circulation défini sur l'arc, fassent entre elles un angle au plus égal à π. Désignons par u la distance d'un point M de l'arc à la parallèle menée par le point A à la tangente en O, par ρ le rayon de courbure en M, par L la longueur de l'arc OA. Le théorème que je me propose d'établir est le suivant:

On ne peut avoir en tous les points de l'arc OA *l'inégalité*

$$\rho u > \lambda,$$

λ *étant lui-même supérieur à* $\frac{4L^2}{\pi^2}$.

Prenons comme axe des x la tangente en O (*figure*),



Oy étant dirigé du côté de la concavité de l'arc. Il résulte des hypothèses que l'ordonnée d'un point qui se

déplace sur la courbe de O en A croît constamment. Il en est de même de l'angle θ que fait avec Ox la tangente en ce point. Soient h l'ordonnée du point A, y l'ordonnée du point M. On a $u = h - y$. Soit K^2 la borne inférieure des valeurs que prend l'expression $\rho(h-y)$ le long de l'arc OA, de sorte qu'on a en tout point

(1) $$\rho(h-y) \geqq K^2.$$

Si le rayon de courbure en A est fini, K est nul. Si ce rayon de courbure est infini, il peut en être autrement.

On a, avec les notations ordinaires,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta\, d\theta}{dy},$$

d'où, en vertu de (1),

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{dy} \leqq \frac{h-y}{K^2}.$$

On en conclut, en intégrant de O en M,

(2) $$1 - \cos\theta \leqq \frac{1}{K^2}\left(hy - \frac{1}{2}y^2\right),$$

inégalité valable en tous les points de l'arc OA.

On a aussi

(3) $$1 + \cos\theta \leqq 2,$$

d'où, par multiplication, et en extrayant les racines carrées,

$$\sin\theta \leqq \frac{1}{K}\sqrt{2hy - y^2}$$

ou encore

(4) $$\frac{1}{\sin\theta} \geqq \frac{K}{\sqrt{2hy - y^2}}.$$

On a, d'autre part,

$$L = \int_0^h \frac{dy}{\sin\theta},$$

d'où, en vertu de (4),

$$L \geqq K \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{2hy - y^2}} = K \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{h^2 - (h-y)^2}} = \frac{\pi}{2} K,$$

d'où enfin

$$(5) \qquad K^2 \leqq \frac{4 L^2}{\pi^2}.$$

K^2 étant la borne inférieure de ρu, il est impossible, d'après cela, que ce produit soit partout supérieur à $\lambda > \frac{4 L^2}{\pi^2}$, ce qui est le théorème à démontrer.

L'inégalité (5) ne peut se changer en inégalité que s'il en est de même des inégalités (2) et (3) en tous les points de l'arc OA. Il faut en particulier que l'on ait

$$1 + \cos\theta = 2$$

ou $\theta = 0$, ce qui est impossible si l'arc OA ne se confond pas avec Ox.

La proposition établie trouve une application en Résistance des matériaux, dans la théorie du « flambement » d'une poutre soumise à une compression longitudinale. Supposons, en effet, que OA soit la forme que prend la fibre neutre d'une poutre encastrée en O, et soumise à son extrémité A à une force de compression P, dirigée parallèlement à Ox. Si l'on envisage la portion MA de la poutre, on voit que, pour l'équilibre, il faut que le moment fléchissant en M, $\mathfrak{M}$, soit égal en valeur absolue au moment de P par rapport au point M :

$$\mathfrak{M} = P u$$

D'autre part, on a, d'après une formule fondamentale dans la théorie de la flexion,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathfrak{M}}{EI} = \frac{Pu}{EI},$$

ou encore

$$P = \frac{EI}{\rho u}.$$

D'après ce qui vient d'être démontré, on peut supposer qu'au point M (qui peut être arbitrairement choisi), on a

$$\rho u < \frac{4L^2}{\pi^2},$$

l'égalité étant exclue, si OA est un arc de courbe véritable. On aura donc

$$P > \frac{\pi^2 EI}{4L^2}. \tag{6}$$

Ainsi la force qui produit un flambement, si petit qu'il soit, doit satisfaire à cette inégalité.

L'inégalité (6), connue sous le nom de *condition d'Euler*, s'établit en général d'une manière différente.

[L¹17d]

TRIANGLES ET QUADRILATÈRES DE PONCELET;

Par M. G. FONTENÉ.

---

1. J'indique ici un fait que je crois nouveau, en le rattachant à des faits connus.

Étant données deux coniques S et S′, on considère

la forme $\lambda S - S'$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines du discriminant de cette forme.

a. La condition d'existence de triangles circonscrits à S et inscrits à S′ est

$$(1) \qquad \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} = 0.$$

b. La condition d'existence de triangles circonscrits à S et conjugués par rapport à S′, de triangles inscrits à S′ et conjugués par rapport à S, est

$$(2) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

c. La condition d'existence de quadrilatères circonscrits à S et inscrits à S′ est enfin

$$(3) \qquad -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

les diagonales des quadrilatères passent par le point P qui est le sommet spécial du triangle autopolaire commun aux deux coniques, les côtés opposés de ces quadrilatères se coupent sur la droite p qui est le côté spécial du même triangle.

c′. Voici le fait que je crois nouveau : *Sous la condition* (3), *c'est-à-dire s'il existe des quadrilatères circonscrits à* S *et inscrits à* S′, *il existe aussi des couples de triangles circonscrits à* S *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S′, *des couples de triangles inscrits à* S′ *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S. Dans chacune des deux séries, les deux triangles d'un même couple sont homologiques, le centre d'homologie étant le point P, l'axe d'homologie étant la droite p. — Les triangles de la première série sont inusités à une conique fixe Σ′, polaire réciproque de la conique S par rapport à la conique S′; les triangles de la seconde série sont circonscrits à une conique fixe Σ, polaire

réciproque de la conique S′ par rapport à la conique S.

On peut supposer, par exemple, que *les deux coniques* S *et* S′ *sont des cercles*, *le cercle* S *ayant son centre sur le cercle* S′ ; ce système est bien connu. Le point P est alors le point à l'infini sur l'axe radical des deux cercles, la droite p est la ligne des centres ; les deux triangles d'un même couple sont symétriques par rapport à cette droite. — Les triangles de la seconde série, inscrite au cercle S′, sont circonscrits à une parabole Σ ayant pour foyer le centre du cercle S, pour directrice la polaire du centre du cercle S′ par rapport au cercle S.

2. Avant d'énoncer la réciproque je rappelle que les deux coniques

$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$(S') \qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0$$

sont polaires réciproques par rapport à chacune des quatre coniques

$$(S, S_1, S_2, S_3) \qquad ax^2 \pm by^2 \pm cz^2 = 0,$$

lesquelles sont deux à deux doublement tangentes.

Cela posé, *si les deux coniques* Σ *et* S′ *admettent des triangles circonscrits à* Σ *et inscrits à* S′, *sous la condition* $a + b + c = 0$, *ces triangles sont conjugués par rapport à la conique* S

$$(ax^2 + by^2 + cz^2 = 0).$$

Il existe des quadrilatères circonscrits à Σ *et inscrits à* S_1 $(-ax^2 + by^2 + cz^2 = 0)$, *des couples de triangles circonscrits à* Σ *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S_1, *des couples de triangles inscrits à* S_1 *et polaires l'un de l'autre par rapport à* Σ. *Il*

existe des quadrilatères inscrits à S' *et circonscrits à* S_1, *des couples de triangles inscrits à* S' *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S_1, *des couples de triangles circonscrits à* S_1 *et polaires l'un de l'autre par rapport à* S'. *La même chose a lieu avec les indices* 2 *et* 3.

On peut prendre comme conique Σ une parabole, comme conique S' un cercle passant au foyer et ayant son centre sur l'axe; la conique S est alors une hyperbole équilatère ayant son centre au foyer de la parabole, la conique S_1 est le cercle principal de cette hyperbole, les coniques S_2 et S_3 sont une hyperbole et une ellipse imaginaire ayant pour centre le point du cercle S' diamétralement opposé au foyer de la parabole.

[K¹13c]

DISTANCE DU CENTRE DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE AU CENTRE DE GRAVITÉ DU TÉTRAÈDRE;

Par M. V. THÉBAULT.

1. Considérons un tétraèdre quelconque ABCD inscrit dans une sphère O et dont le centre de gravité est Γ. Ce point est situé à l'intersection des droites qui joignent les sommets A, B, C, D aux centres de gravité G_A, G_B, G_C, G_D des faces opposées. De plus, Γ divise chacune des droites AG_A, BG_B, CG_C, DG_D, dans le rapport

$$\frac{\Gamma G_A}{\Gamma A} = \frac{\Gamma G_B}{\Gamma B} = \frac{\Gamma G_C}{\Gamma C} = \frac{\Gamma G_D}{\Gamma D} = \frac{1}{3}.$$

Lemme. — *Dans un tétraèdre quelconque* ABCD,

on a

$$(1)\quad \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 - \frac{1}{3}\left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2\right) = 3\,\overline{DG}_D^2,$$

G_D *étant le centre de gravité de la base* ABC.

Car

$$\overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AG}_D^2 + \overline{BG}_D^2 + \overline{CG}_D^2 + 3\,\overline{DG}_D^2$$

et

$$\overline{AG}_D^2 + \overline{BG}_D^2 + \overline{CG}_D^2 = \frac{1}{3}\left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2\right).$$

Considérons maintenant les tétraèdres OABC, OBCD. OCAD, OABD. La relation (1) appliquée à chacun d'eux donne, en ajoutant, R étant le rayon de la sphère O,

$$\sum 3\,\overline{OG}_A^2 = 12\,R^2 - \sum \frac{2}{3}\,\overline{AB}^2.$$

La relation de Stewart appliquée aux triangles OAG_A, OBG_B, OCG_C, ODG_D, donne aussi, par addition,

$$\sum 3\,\overline{OG}_A^2 = 4\left(4\,\overline{O\Gamma}^2 - R^2\right) + \sum \frac{3}{4}\,\overline{AG}_A^2.$$

On en déduit, avec (1), cette relation entre les arêtes a, b, c, α, β, γ, la distance $O\Gamma$ et le rayon R de la sphère circonscrite à un tétraèdre,

$$\overline{O\Gamma}^2 = R^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{16}\right)$$

2. Les remarques suivantes apparaissent d'elles-mêmes.

La somme des carrés des arêtes des tétraèdres, inscrits dans une sphère et ayant un point donné pour centre de gravité, est constante.

Le lieu des centres de gravité des tétraèdres ins-

crits dans une sphère et tels que la somme des carrés de leurs arêtes soit constante, est une sphère concentrique à la sphère circonscrite.

Enfin, *la somme des carrés des arêtes des tétraèdres inscrits dans une sphère donnée est maximum lorsque leur centre de gravité est au centre de la sphère circonscrite.*

Dans un tel tétraèdre, les arêtes opposées sont égales. On obtient ainsi une propriété de ces tétraèdres θ qu'il y a lieu d'ajouter à celles qui ont été réunies par M. J. Lemaire dans la solution de la question de Mathématiques élémentaires posée au Concours d'Agrégation en 1914 (*Nouvelles Annales*, p. 502) :

Parmi les tétraèdres inscrits dans une sphère donnée, ceux dont les arêtes opposées sont égales, sont tels que la somme des carrés de leurs arêtes soit maximum. Si a, b, c *sont les arêtes*, R *le rayon de la sphère*,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8\,R^2.$$

[K¹9aα]

SUR L'AIRE D'UN POLYGONE ;

Par M. V. JAMET.

AVANT-PROPOS.

Dans la pratique de l'arpentage, on considère comme irréductible la notion expérimentale de l'aire d'un polygone, et l'on admet (avec raison) que cette aire est égale à la somme des aires des polygones partiels dans lesquels on peut le décomposer.

Mais comme cette décomposition est possible d'une infinité de manières, on peut se demander, en se plaçant à un point de vue plus scientifique, si la somme trouvée sera toujours la même, quel que soit le procédé de décomposition adopté. Le présent travail a pour but de répondre à cette question. Les deux premiers paragraphes se rapportent au cas d'un polygone décomposé en triangles ayant un sommet commun, et dont les bases sont les côtés du polygone. Les formules de la géométrie analytique nous permettent de conclure que la somme des aires de ces triangles est indépendante de la position occupée par leur sommet commun, et aussi d'exprimer l'aire du polygone en fonction des coordonnées de ses sommets, cette aire, étant, par définition, somme des aires des triangles.

Dans les trois paragraphes suivants, nous profitons de l'expression trouvée pour montrer que, quels que soient les polygones partiels dans lesquels on a décomposé le polygone total, la somme de leurs aires est toujours la même, et pour indiquer brièvement comment on peut rattacher à notre théorie la quadrature d'un segment limité par un arc de courbe et par ses deux rayons extrêmes.

1. Soit un point A, de cordonnées $x_1\, y_1$. Rappelons que l'équation de la droite OA est

$$(1) \qquad x_1 y - y_1 x = 0,$$

et observons que si x_1 est positive et que si, dans le polynome

$$x_1 y - y_1 x,$$

on met à la place des coordonnées courantes les coordonnées d'un point B situé sur la partie positive de l'axe des y, ce polynome devient positif; si, au con-

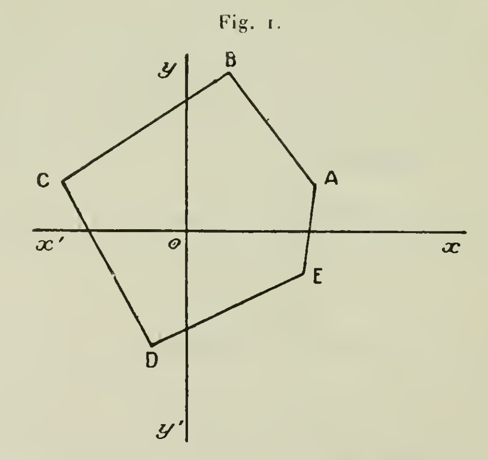
traire, x_1 est négative, c'est en mettent à la place des coordonnées courantes les coordonnées d'un point situé sur la partie négative de l'axe des y qu'on rend le polynome positif.

Ces deux résultats peuvent s'énoncer comme il suit :

Ayant divisé le plan, par la droite (1) *en une région positive et une région négative, pour amener le point* A, *par une rotation autour de* O, *dans la région positive, il suffit de le faire tourner, d'un angle moindre que* π, *dans le sens positif de la trigonométrie.*

Soit, d'autre part, un polygone ABCDEF rapporté à deux axes rectangulaires issus d'un point O intérieur au polygone, et soient x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, ... les coordonnées de ses sommets A, B, C, D, ..., dans l'ordre où ils sont rencontrés par un mobile qui se meut sur le

Fig. 1.



contour du polygone dans le sens positif, c'est-à-dire de telle sorte que le rayon vecteur allant du point O au

point mobile tourne dans le sens positif. Écrivons l'équation de la droite AB sous la forme

$$(x_1 - x_2)(y_2 - y) - (y_1 - y_2)(x_2 - x) = 0.$$

Si, dans le premier membre de l'équation, on met à la place de x et y, les coordonnées o, o de l'origine, on trouve

$$x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

quantité positive d'après ce qui précède, puisque le point B est dans la région positive par rapport à l'équation de la droite OA, mise sous la forme (1). Si donc, dans ce même polynome, x et y désignent les coordonnées d'un point M intérieur au polygone, et par conséquent situé, par rapport à la droite AB, du même côté que le point O, ce polynome sera positif, et la distance du point M à la droite AB sera positive et égale à

$$\frac{(x_1 - x_2)(y_2 - y) - (y_1 - y_2)(x_2 - x)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}.$$

De même, les distances du point M aux droites BC, CD, ..., EA seront positives, et s'exprimeront comme il suit :

$$\frac{(x_2 - x_3)(y_3 - y) - (y_2 - y_3)(x_3 - x)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{(x_n - x_1)(y_1 - y) - (y_n - y_1)(x_1 - x)}{\sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2}},$$

n désignant le nombre des sommets du polygone.

En multipliant ces expressions, respectivement, par les mesures des distances AB, BC, CD, etc., et faisant la somme des produits, on trouve une fonction linéaire de x et de y. Mais on observe que dans cette fonction le coefficient de x est nul, ainsi que le coefficient de y.

La somme trouvée est donc indépendante de la position du point M, et l'on est conduit au théorème suivant :

La somme des produits des côtés d'un polygone par les longueurs des perpendiculaires à ces côtés, menées par un point intérieur au polygone, est toujours la même, quelle que soit la position de ce point.

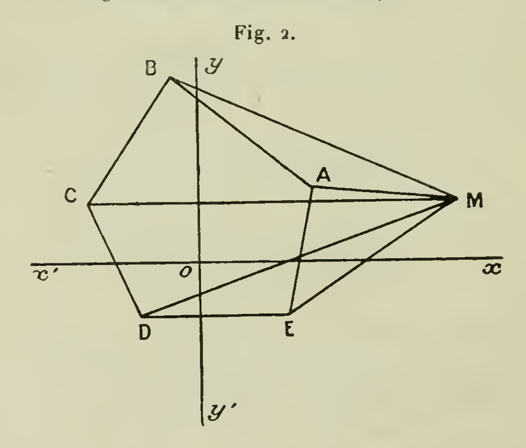
Soit 2S cette somme ; on peut appeler aire du polygone la grandeur S, et l'on trouve

$$(2) \quad 2S = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots + (x_ny_1 - x_1y_n).$$

2. Considérons maintenant un point M, extérieur au polygone ; joignons-le à tous les sommets A, B, C, D, E, et parmi les triangles MAB, ACB, ..., ainsi construits, considérons :

1° Ceux qui sont partiellement intérieurs au polygone (tels les triangles MBC, MCD, MDE) ;

Fig. 2.



2° Ceux qui lui sont totalement extérieurs, tels les triangles MBA, MAE.

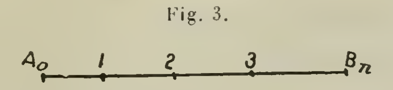
Dans la somme analogue à celle qui entre dans l'égalité (2), un triangle de la première catégorie donne lieu à un terme positif; car les points M et O sont du même côté par rapport à la base du triangle. De même, un triangle de la deuxième catégorie donne lieu à un terme négatif, et la somme algébrique des aires de nos triangles s'exprime encore par la formule (2).

D'autre part, cette somme est indépendante de la position des axes de coordonnées par rapport au polygone. Son expression analytique est toujours la même; c'est là un fait dont la vérification analytique ne comporte aucune difficulté.

3. Tout ce qui précède se rattache au procédé d'arpentage, dit *à la planchette*. Mais on emploie aussi d'autres procédés tels que le procédé par la décomposition en trapèzes, consistant à décomposer le polygone en divers polygones plus aisément mesurables, et à faire la somme de leurs aires. La formule (2) va nous montrer que cette somme est toujours la même, quel que soit le procédé employé.

Considérons d'abord, sur une droite AB, les points A, 1, 2, ..., B, dont nous désignons les coor-

Fig. 3.



données par $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ..., $x_n y_n$; puis faisons la somme

$$(x_0 y_1 - y_0 x_1) + (x_1 y_2 - y_1 x_2) + \ldots + (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n).$$

Le point x_1, y_1 étant en ligne droite avec les points x_0, y_0, et x_2, y_2, on peut, dans les deux premiers termes

de cette somme, remplacer

$$\begin{aligned} x_1 &\quad \text{par} \quad x_0 + \lambda(x_2 - x_0), \\ y_1 &\quad \text{par} \quad y_0 + \lambda(y_2 - y_0). \end{aligned}$$

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} x_0 y_1 - y_0 x_1 &= \lambda(x_0 y_2 - y_0 x_2), \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 &= (1 - \lambda)(x_0 y_2 - y_0 x_2), \end{aligned}$$

puis

$$(x_0 y_1 - y_0 x_1) + (x_1 y_2 - y_1 x_2) = x_0 y_2 - y_0 x_2,$$

ce qui diminue d'une unité le nombre des termes de la somme ci-dessus. Dans la somme transformée, on remplacera les deux premiers termes par un terme unique

$$x_0 y_3 - y_0 x_3,$$

et ainsi de suite. Finalement, la somme entière sera remplacée par

$$x_0 y_n - y_0 x_n.$$

On pourrait dire aussi : Soit δ la distance de l'origine des coordonnées à la droite AB. La somme ci-dessus est égale à

$$\delta(\overline{A1} + \overline{12} + \overline{23} \ldots + \overline{n-1\,B}) = \delta . AB = x_0 y_n - y_0 x_n.$$

Nous observerons encore que

$$x_p y_{p+1} = y_p x_{p+1} = -(x_{p+1} y_p - y_{p+1} x_p);$$

de telle sorte que si l'on chemine sur le contour d'un polygone dans un sens déterminé, en faisant correspondre à chacun de ses côtés un terme de la forme

$$x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1},$$

où p et $p+1$ désignent les numéros d'ordre de deux sommets consécutifs, quand on cheminera sur le même

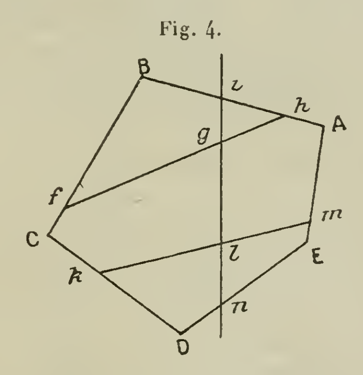
côté en sens inverse, on sera conduit à lui faire correspondre un terme opposé au précédent.

4. Soit maintenant un polygone ABCDE, décomposé d'une manière quelconque, en polygones partiels $Bfgi$, igh, ... Faisons la somme de leurs aires, en appliquant à chacun d'eux la formule (2). Soit S cette somme : nous trouverons

$$2S = \sum (x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1}),$$

la somme Σ s'étendant à tous les côtés des polygones partiels, parcourus d'après la loi suivante : 1° En ce

Fig. 4.



qui concerne les côtés appartenant au contour du polygone total, chacun d'eux est parcouru une seule fois dans le sens positif (¹) et la somme de tous les termes répondant aux côtés (tels Ah, hi, iB) dans

(¹) Nous prenons par exemple pour sens positif le sens de la rotation d'un vecteur issu d'un point fixe à l'intérieur du polygone et dont l'extrémité est au point mobile, le sens de cette rotation étant le sens positif de la trigonométrie; ou bien encore nous supposons qu'un observateur, se déplaçant avec le mobile, aura sans cesse à sa gauche l'aire enveloppée.

lesquels se décompose un des côtés du polygone total, se réduit à un seul terme de la forme

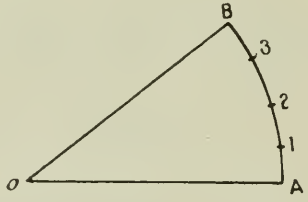
$$x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1},$$

où p et $p = 1$ désignent les numéros d'ordre de deux sommets consécutifs du polygone total (*voir* n° 3).

2° Chacun des côtés des polygones partiels, intérieurs au polygone total (par exemple kl, lg, gf) sera parcouru deux fois en sens inverse et donnera lieu à deux termes égaux et de signe contraire, comme il est dit à la fin du n° 3. Donc on trouvera, finalement, une formule entièrement identique à la formule (2).

5. Ce qui précède conduit naturellement au calcul de l'aire limitée par un segment de courbe OA 12...B. En effet, dans ce segment, inscrivons une ligne polygonale A 123...B, et évaluons, par la formule (2), l'aire

Fig. 5.



du polygone OA 12...B, en supposant l'origine des coordonnées au point O. Nous trouvons

$$2\mathrm{S} = \sum x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1},$$

en désignant par x_p, y_p, x_{p+1}, y_{p+1} les coordonnées de deux sommets consécutifs de notre ligne polygonale. Écrivons le terme général de cette somme sous la forme

$$x_p(y_{p+1} - y_p) - y_p(x_{p+1} - x_p).$$

Si les deux sommets consécutifs se rapprochent de plus en plus, chaque terme de notre somme est un infiniment petit, et la somme de ces infiniment petits a pour limite l'intégrale

$$\int x\,dy - y\,dx$$

calculée tout le long de l'arc AB. Ce résultat, et ses conséquences, sont choses trop connues pour qu'il soit nécessaire d'y insister plus longuement.

CONCOURS SPÉCIAL D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1919.
SUJETS DE COMPOSITION.

Première composition de Mathématiques.

On donne une ellipse rapportée à ses axes, de longueurs $2a$, $2b$, et les tangentes aux quatre sommets. Sur cette ellipse, on prend un point M, de coordonnées $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, et l'on mène la tangente en ce point. On trace le cercle C qui a pour diamètre la partie de cette tangente comprise entre les tangentes aux sommets du grand axe et le cercle C′ qui a pour diamètre la partie de la même tangente qui est comprise entre les tangentes aux sommets du petit axe.

1° Former, en fonction du paramètre φ, les équations des cercles C et C′. Quelles remarques peut-on faire au sujet des deux familles de cercles C et C′ et de leur axe radical?

2° Calculer, en fonction de φ, les coordonnées des points d'intersection D et D′ des deux cercles C et C′.

3° Trouver, lorsque M décrit l'ellipse, le lieu du

point P qui divise le segment DD′ dans un rapport donné m.

4° Enveloppe des courbes ainsi trouvées pour les diverses valeurs de m. Discuter la réalité des points de contact de ces courbes avec leur enveloppe ; distinguer les divers cas de figure.

Deuxième composition de Mathématiques.

On donne l'équation en t

(E) $$(b - at)(1 + t^2) - 1 = 0.$$

1° Déterminer les coefficients a et b de manière que cette équation admette une racine double donnée θ.

2° Considérant les expressions ainsi trouvées pour a et b comme les coordonnées rectangulaires d'un point M, construire le lieu (C) des positions que prend le point M quand on fait varier la racine double donnée θ.

Les coefficients a et b étant supposés quelconques, quelle est la signification géométrique de l'équation (E) relativement à la courbe (C) et au point P de coordonnées a et b?

3° Dans l'équation (E), on donne à b la valeur $\frac{5}{8}$ et on laisse a quelconque ; discuter, suivant la valeur de a, la réalité des racines de l'équation (E).

Contrôler les résultats de la discussion algébrique en utilisant la signification géométrique de l'équation (E).

4° La tangente à la courbe (C), de coefficient angulaire $m = \tan g\alpha$, rencontre cette courbe en deux points M_1 et M_2 autres que le point de contact M_0. Calculer, en fonction de α, la longueur de l'arc $M_1 M_0 M_2$ compris, sur la courbe C, entre les points M_1 et M_2. On supposera $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. (4 heures).

Épure.

Par un point O, situé à 3^{cm} au-dessus du plan horizontal de projection et à 9^{cm} en avant du plan vertical, passe une droite de front Δ, qui fait un angle de 45° avec la verticale et va en descendant de gauche à droite. Une droite de front Γ fait un angle de 30° avec Δ. La perpendiculaire commune aux droites Γ et Δ passe par le point O et a pour longueur 3^{cm}. La droite Γ, en tournant autour de Δ, engendre un hyperboloïde H.

Par le point O, on élève à Δ, dans le plan de front, une perpendiculaire OS de longueur égale à 3^{cm}, au-dessous de O.

Une droite, passant par S et faisant un angle de 30° avec SO, engendre un cône C en tournant autour de SO.

On limite l'hyperboloïde H par le plan horizontal de projection et par un plan de profil situé à 3^{cm} à gauche du point O. Représenter ce qui reste de ce solide lorsqu'on enlève la partie intérieure au cône C.

Ligne de terre sur le petit axe de la feuille. Ligne de rappel du point O à 6^{cm} à gauche du grand axe.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1571.

(1887, p. 582; 1917, p. 235.)

C_m^p désignant le nombre des combinaisons de m lettres p à p, démontrer la formule

$$2^{2n} = C_{2n}^{n} + 2\,C_{2n-1}^{n-1} + \ldots + 2^k\,C_{2n-k}^{n-k} + \ldots + 2^n.$$

(Pellerin.)

Solution
Par M. R. B.

Désignons par A_n la somme qui forme le second membre de la formule à démontrer. A_n est le coefficient de x^n dans le polynome

$$P(x) = (x+1)^{2n} + 2x(x+1)^{2n-1} + \ldots + 2^n x^n (x+1)^n.$$

On a

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^n [(x+1)^n + 2x(x+1)^{n-1} + \ldots + 2^n x^n] \\ &= (x+1)^n \frac{2^{n+1}x^{n+1} - (x+1)^{n+1}}{2x-(x+1)} \\ &= (x+1)^n \frac{2^{n+1}x^{n+1} - (x+1)^{n+1}}{x-1}. \end{aligned}$$

Il résulte de là que le polynome

$$Q(x) = (x-1)P(x) + (x+1)^{2n+1}$$

est divisible par x^{n+1}.

Le terme indépendant dans le polynome $P(x)$ étant égal à 1, posons

$$P(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

En écrivant que les termes de $Q(x)$, de degrés inférieurs à $n+1$, sont nuls, on a la suite d'égalités

$$\begin{array}{l} 1 \quad\;\; - A_1 + C_{2n+1}^1 = 0, \\ A_1 \quad - A_2 + C_{2n+1}^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{n-1} - A_n + C_{2n+1}^n = 0, \end{array}$$

d'où, en ajoutant,

$$A_n = 1 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+2}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n.$$

Or le second membre de l'égalité précédente est égal à la demi-somme des coefficients de $(x+1)^{2n+1}$, somme égale, comme on sait, à 2^{2n+1}.

Donc

$$A_n = 2^{2n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Autre solution par M. H. DE MONTILLE, qui déduit de sa démonstration d'autres identités, par exemple celle-ci :

$$2^{2n} = C_{2n+1}^{n} + C_{2n}^{n-1} + 2\,C_{2n-1}^{n-2} + 2^2\,C_{2n-2}^{n-3} + \dots$$
$$+ 2^{n-2}\,C_{n+2}^{1} + 2^{n-1}.$$

1761.

(1897, p. 148.)

Cinq droites quelconques sont données dans un plan. On mène une transversale par un point fixe et, sur cette droite, on prend un sixième point qui forme une involution avec les cinq points déterminés par les cinq droites données. Le lieu géométrique de ce sixième point, quand la transversale tourne autour de son pivot, est formé de cinq coniques. (DEWULF.)

SOLUTION

Par M. L. MALOUE.

Cet énoncé est erroné.

Soient 1, 2, 3, 4, 5 les cinq droites données, O le point fixe, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 les cinq points d'intersection des cinq droites avec une sécante D variable issue du point O, M un point de cette sécante tel que les trois couples (M, M_1), (M_2, M_3), (M_4, M_5) forment une involution. Il est clair que le point M est unique sur la sécante. Le lieu de M est donc une unicursale Γ.

Pour trouver l'ordre de Γ, il faut chercher combien de fois cette courbe passe en O. Supposons que D soit tel que M soit confondu avec O. Il y a alors involution entre les trois couples (O, M_1), (M_2, M_3), (M_4, M_5).

On a donc l'égalité entre rapports anharmoniques de points

$$(M_1\,O\,M_2\,M_4) = (O\,M_1\,M_3\,M_5) = (M_1\,O\,M_5\,M_3),$$

et par suite l'égalité entre rapports anharmoniques de faisceaux

$$A(M_1\,O\,M_2\,M_4) = B(M_1\,O\,M_5\,M_3),$$

en appelant A le point de rencontre de 2,4 et B le point de rencontre de 3,5. M_1 appartient donc au lieu défini par la relation précédente. Comme les deux faisceaux ont chacun

trois rayons fixes, ce lieu est une conique Γ' qui passe en A et B. Γ' rencontre I en deux points. Γ a donc un point double en O et c'est une *cubique*.

Cette cubique a été obtenue en associant les points M, $M_1, \ldots, M_5$ dans un certain ordre. En faisant varier cet ordre de toutes les manières possibles, on trouve que le lieu complet se compose de 15 cubiques.

Autre solution, par M. H. de Montille.

1779.

(1897, p. 388; 1917, p. 356.)

La ligne OMN *rencontre les lignes* AB, AC *en* M *et* N, *de telle sorte qu'on a* $\overline{OM}^2.AN.AC = \overline{ON}^2.AM.MB$. *Déterminer* O. (W.-J. Greenstreet.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soient x, y les coordonnées de O par rapport aux axes $\overline{ABx}$, ACy, on a immédiatement

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{y}{x}\,\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}},$$

d'où

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{ON}^2}\,\frac{\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{AN.BM}{AM.AC} = \frac{BB_1}{AC},$$

B_1 désignant l'intersection de la parallèle à AC menée par B avec MN; soient B_2 l'intersection avec AC de la parallèle à AB_1 menée par B, D_1 l'intersection de la perpendiculaire à AC en A avec le cercle de diamètre CB_2, on a

$$\frac{BB_1}{AC} = \frac{AB_2}{AC} = \frac{\overline{DB_2}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{y^2}{x^2},$$

formule qui détermine immédiatement deux droites AO_1, AO_2 conjuguées harmoniques par rapport à AB, BC, dont l'intersection avec MN détermine les deux points O solutions du problème.

AVIS.

Au moment où les études scientifiques, interrompues par la guerre, reprennent un vigoureux essor, il nous a paru que les *Nouvelles Annales* se devaient d'apporter un concours plus efficace que par le passé à l'Enseignement, et particulièrement à l'Enseignement Supérieur. Nous avons ainsi été conduits à concevoir une véritable réorganisation de ce journal, dans le sens que nous allons indiquer.

Chaque numéro des *Nouvelles Annales* contiendra, en principe, des *Mémoires originaux*, des *Exercices de Licence et d'Agrégation*, une *Chronique du mouvement mathématique*, des *Énoncés et des solutions de questions*.

1° Les Mémoires seront choisis de manière à être intelligibles à tout lecteur de culture mathématique générale; nous entendons par là : possédant les connaissances que l'on acquiert dans les Lycées et les Facultés. C'est dire que nous écarterons les travaux portant sur des sujets trop particuliers, aussi bien d'ordre élémentaire que d'ordre supérieur, à moins qu'ils ne soient présentés de manière à se rattacher aux connaissances générales définies plus haut. Certaines questions n'intéressent qu'un petit nombre de spécialistes, dont on n'est pas obligé de suivre les études pour être quand même assez bon mathématicien, et ni l'esprit des *Nouvelles Annales*, ni leur format limité ne leur permettent de faire accueil aux productions de ces savants, si méritoires soient-elles.

En revanche, elles feront bon accueil à des articles qui, sans viser à l'*originalité* proprement dite, seront consacrés par exemple à l'exposition de théories insuffisamment connues en France, ou, qui même traitant des propositions les plus classiques, se recommanderont par le simple perfectionnement d'un détail de démonstration.

2° Comme par le passé, nous publierons les sujets des compositions données dans les diverses Facultés, pour l'obtention des certificats de licence (mathématiques générales, calcul différentiel et intégral, analyse supérieure, géométrie supérieure, mécanique rationnelle, mécanique appliquée, astronomie, physique mathématique). Mais nous donnerons en outre, pour le plus grand nombre possible de sujets, des *solutions* plus ou moins détaillées, soit en même temps que les énoncés, soit dans des numéros ultérieurs. Nous publierons aussi, également avec solutions, des sujets d'exercices intéressant les candidats à l'Agrégation, et les problèmes donnés pour l'Agrégation et pour l'admission aux grandes Écoles.

Nous sommes heureux d'adresser ici nos remerciements à MM. les Professeurs des Facultés des Sciences, qui ont bien voulu, pour la plupart, nous promettre, pour cette partie du journal, un concours à défaut duquel notre tâche eût été à peu près impossible.

3° Dans la *Chronique du mouvement mathématique*, nous publierons des nouvelles intéressant le monde des mathématiciens, telles que nominations, distinctions, ouvertures de Cours importants; des résumés plus ou moins détaillés de découvertes récentes (sans qu'il s'agisse d'un dépouillement systématique des périodiques, travail pour lequel il existe des publications auxquelles les *Nouvelles Annales* ne prétendent

pas se substituer); des analyses bibliographiques, etc.

4° Nous continuerons à proposer régulièrement des *Questions*, portant sur les parties les plus diverses des mathématiques, pour donner à nos lecteurs le moyen de collaborer le plus largement possible à la rédaction des *Nouvelles Annales*.

Nous espérons que ce programme recevra l'agrément de nos lecteurs : notre but est, on le voit, beaucoup moins de faire des *Nouvelles Annales* un des périodiques où se crée la Science, que, plus modestement et non moins utilement, croyons-nous, de les mettre au service de la *Culture mathématique*. Il nous semble, en particulier, que notre journal peut servir de trait d'union entre les diverses Facultés et faciliter leur collaboration. Notre plus vif désir serait que les Professeurs portassent à notre œuvre, telle que nous avons essayé de la définir, un intérêt dont ils nous donneraient la preuve par de fréquentes communications.

Les rédacteurs :

C.-A. Laisant, R. Bricard,
G. Fontené, A. Boulanger.

[H4a]

SUR LES ÉQUATIONS DE DIDON;

Par M. Pierre HUMBERT,

Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences de Montpellier.

1. Soit une fonction $z(x)$ vérifiant une équation différentielle E_1, linéaire, homogène, et d'ordre p,

$$(E_1)\qquad A_p\frac{d^pz}{dx^p}+A_{p-1}\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}+\ldots+A_1\frac{dz}{dx}+A_0z=0,$$

où les A sont des fonctions de x. Il est clair que la fonction

$$y(x) = \frac{d^n z}{dx^n},$$

où n est un entier arbitraire, vérifie une équation différentielle du même type, que l'on formera en dérivant 1, 2, ..., n fois par rapport à x le premier membre de E_1, en éliminant entre ces n équations et l'équation E_1 elle-même les n quantités z, $\frac{dz}{dx}$, ..., $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$, et en remplaçant ensuite dans l'équation E_2 restante les symboles $\frac{d^n z}{dx^n}$, $\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}}$, ..., $\frac{d^{n+p} z}{dx^{n+p}}$ par y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^p y}{dx^p}$.

Réciproquement, si une fonction $y(x)$ vérifie une équation E_2, linéaire, homogène et d'ordre p, on pourra toujours former une équation E_1 du même type, la relation entre E_1 et E_2 étant celle que nous venons de décrire.

Les p intégrales indépendantes $y_1\, y_2 \ldots y_p$ de E_2 se déduiront alors des p intégrales indépendantes $z_1\, z_2 \ldots z_p$ de E_1 par les relations

$$y_i = \frac{d^n z_i}{dx^n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

L'intégration complète de E_2 est ainsi ramenée à celle de E_1, qu'un choix convenable de l'entier n pourra, dans certains cas, rendre plus simple que E_2.

2. Considérons en particulier le cas où, dans l'équation E_1, chaque coefficient A_λ de $\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}$ est un polynome en x de degré λ, pouvant d'ailleurs s'abaisser à un degré inférieur. L'équation E_2 s'obtient alors très simplement en dérivant n fois, terme à terme, l'équation E_1, et en remplaçant $\frac{d^n z}{dx^n}$ par y, sans qu'on ait à effectuer d'élimination.

De même, on passe aisément, en suivant la marche inverse, de l'équation E_2 à l'équation E_1.

Nous dirons, dans ce cas, que E_1 est l'*équation de Didon* de E_2, pour la valeur n.

3. Afin de montrer l'intérêt de cette notion, rappelons brièvement quelques cas bien connus, empruntés à la théorie des fonctions sphériques et analogues, où l'on fait usage des principes ci-dessus.

a. Équation des polynomes de Legendre. — L'exemple est classique. Le polynome de Legendre P_n d'ordre n, qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0$$

pouvant, comme on le sait, se mettre sous la forme

$$P_n=k\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n;$$

k étant un coefficient constant convenablement choisi, il est clair que l'équation de Didon, pour la valeur n, sera l'équation

$$(x^2-1)z''-2(n-1)xz'-2nz=0$$

vérifiée par la fonction $(x^2-1)^n$. On en écrit alors immédiatement, par la formule d'Euler, une deuxième solution indépendante

$$q(x)=(x^2-1)^n\int_\infty^x\frac{du}{(u^2-1)^{n+1}};$$

et par conséquent on a deux solutions indépendantes de l'équation de Legendre, la première

$$P_n=k\frac{d^n}{dx^n}(u^2-1)^n$$

qui est le polynome de Legendre, et la deuxième

$$Q_n = k' \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n \int_\infty^x \frac{du}{(u^2-1)^{n+1}}\right]$$

qui est la fonction de Legendre de seconde espèce.

b. Le résultat précédent s'étend sans peine aux équations différentielles qui définissent les fonctions *sphériques adjointes* et les fonctions *toroïdales*.

c. L'application du même procédé à l'équation *hypergéométrique* est également bien connue. Darboux, dans son étude sur les polynomes de Jacobi [1], en a tiré une expression de la fonction de la seconde espèce rattachée à ces polynomes.

d. Signalons aussi, sans insister davantage, les équations différentielles des polynomes de Laguerre et d'Hermite (à une variable), pour lesquelles l'équation de Didon se forme immédiatement.

4. Tous les exemples précédents portent sur des équations du second ordre, dont on connaît déjà une solution : la deuxième intégrale, c'est-à-dire la fonction de seconde espèce, se trouve donc immédiatement par la méthode d'Euler. Le procédé de l'équation de Didon donne, simplement, une seconde expression pour cette fonction : mais, à tout prendre, il ne présente alors qu'un médiocre intérêt. Traitons un cas plus compliqué, où l'équation est du troisième ordre.

Considérons les polynomes d'ordre $2n$ en x, introduits par M. Appell comme généralisation des poly-

(1) *Approximations des fonctions de très grands nombres* (*Journ. Math. pures et appl.*, 1878).

nomes de Legendre ([1]), et définis par

$$P_{2n}(x) = \frac{d^n}{dx^n}[x^n(1-x^2)^n].$$

Ce polynome vérifie, comme on peut s'en assurer, l'équation différentielle du troisième ordre

$$(1)\qquad x(1-x^2)y''' + 2(1-3x^2)y'' + 3(n-1) \times (n+2)xy' + 2n(n+1)(n+2)y = 0.$$

L'intégration complète de cette équation, à notre connaissance, n'a pas encore été faite. Cherchons à obtenir, par la méthode de l'équation de Didon, deux autres solutions. Pour la valeur n, l'équation de Didon est

$$(2)\qquad x(1-x^2)z''' + (2-n) \times (1-3x^2)z'' - 6x(1-2n)z' + 6nz = 0.$$

On en tire, en intégrant terme à terme,

$$(3)\qquad x(1-x^2)z'' + (1-n)(1-3x^2)z' + 6nxz = 0,$$

et, en intégrant une fois encore,

$$(4)\qquad x(1-x^2)z' - n(1-3x^2)z = 0.$$

L'équation (4) est vérifiée par la fonction

$$z = x^n(1-x^2)^n$$

qui vérifie aussi (3) et, comme il fallait s'y attendre, (2).

L'équation (3) étant du second ordre, rien n'est plus facile que d'en déterminer une seconde solution z_1, qui sera aussi solution de (2). On trouve tout de suite

$$z_1 = k\,x^n(1-x^2)^n \int_x^x \frac{du}{u^{n+1}(1-u^2)^{n+1}},$$

([1]) *Archiv Math. Physik*, 3e série, 1901, p. 70.

d'où l'on tirera une expression pour une solution de (1), c'est-à-dire une fonction de seconde espèce

$$y_1 = k \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n (1 - x^2)^n \int_\infty^x \frac{du}{u^{n+1}(1 - u^2)^{n+1}} \right].$$

Voyons sous quelle forme elle se présente. Si n est pair, donc $n + 1$ impair, la décomposition en éléments simples de la fraction

$$\frac{1}{u^{n+1}(1 - u^2)^{n+1}}$$

donnera des termes en

$$\frac{1}{u^{n+1}}, \quad \frac{1}{u^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{(1 + u)^{n+1}}, \quad \frac{1}{(1 + u)^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1 + u}$$

et

$$\frac{1}{(1 - u)^{n+1}}, \quad \frac{1}{(1 - u)^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1 - u}.$$

Si α est le coefficient de $\frac{1}{u}$, les coefficients de $\frac{1}{1 - u}$ et $\frac{1}{1 - u}$ seront $-\frac{\alpha}{2}$ et $+\frac{\alpha}{2}$; en intégrant, on obtiendra donc des termes

$$\frac{1}{x^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{(1 - x^2)^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1 - x^2}$$

et un terme non algébrique, qui sera

$$\alpha \log \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Donc, avec un choix convenable du coefficient k, on aura

$$z_1 = \frac{1}{2} x^n (1 - x^2)^n \log \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \text{polynome d'ordre } 3n - 1$$

et, par conséquent,

$$y_1 = \frac{1}{2} P_{2n}(x) \log \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \text{polynome d'ordre } 2n-1.$$

Si n est impair, $n+1$ sera pair, et il n'y aura pas dans la décomposition de terme en $\frac{1}{u}\cdot$ Le terme logarithmique sera alors $\log\frac{1+x}{1-x}$, et l'on aura pour y_1 la forme

$$y_1 = \frac{1}{2} P_{2n}(x) \log \frac{1+x}{1-x} + \text{polynome d'ordre } 2n-1.$$

On voit tout de suite l'analogie de cette fonction de seconde espèce avec la fonction de Legendre.

Cherchons maintenant une troisième solution de l'équation de Didon : c'est chose aisée, puisque nous en connaissons déjà deux ; après une première intégration, nous trouverons, en sous-entendant le coefficient constant,

$$\frac{dz_2}{dx} = n(1-3x^2)(1-x^2)^{n-1} x^{n-1} \int_{\infty}^{x} \frac{du}{u^{n+2}(1-u^2)^{n+2}}.$$

Sans avoir besoin de remonter à z_2, nous écrirons immédiatement la fonction y_2, fonction de troisième espèce, sous la forme

$$y_2 = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[n(1-3x^2) x^{n-1} (1-x^2)^{n-1} \int_{\infty}^{x} \frac{du}{u^{n+2}(1-u^2)^{n+2}} \right].$$

L'intégration complète de l'équation des polynomes de M. Appell est ainsi effectuée.

Cette fonction y_2 de troisième espèce a une expression moins simple que la fonction de deuxième espèce :

on verrait en effet que

$$y_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2} P_{2n}(x) \log \dfrac{1+x}{1-x} + \text{fonction algébrique de } x \\ \qquad\qquad\qquad (n \text{ pair}), \\ \dfrac{1}{2} P_{2n}(x) \log \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \text{fonction algébrique de } x \\ \qquad\qquad\qquad (n \text{ impair}): \end{cases}$$

mais la fonction complémentaire est une fraction rationnelle et non plus un polynome entier.

5. La notion d'équation de Didon s'étend sans peine à des systèmes d'équations aux dérivées partielles, et c'est là une importante application de cette théorie. Comme exemple, nous rappellerons l'intégration complète des équations aux dérivées partielles

$$(\text{I}) \quad \begin{cases} (1-x^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + (n-2)x\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \qquad - (m+1)y\dfrac{\partial U}{\partial y} + (m+n)(m+1)U = 0, \\ (1-y^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + (m-2)y\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \qquad - (n+1)x\dfrac{\partial U}{\partial x} + (m+n)(n+1)U = 0 \end{cases}$$

vérifiées par le polynome d'Hermite

$$U_{m,n}(x, y) = k\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}(1 - x^2 - y^2)^{m+n},$$

extension à deux variables du polynome de Legendre. C'est F. Didon qui a le premier remarqué que la dérivation m fois par rapport à x et n fois par rapport à y

du système

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases} (1-x^2)\dfrac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x^2} - xy\dfrac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x\,\partial y} \\ \qquad + 2(m+n-1)x\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - y\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + 2(m+n)\mathrm{P} = 0, \\ (1-y^2)\dfrac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x^2} - xy\dfrac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x\,\partial y} \\ \qquad + 2(m+n-1)y\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - x\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + 2(m+n)\mathrm{P} = 0 \end{cases}
$$

faisait précisément retomber sur le système (I). Il a résolu les équations (II) après d'assez longs calculs; M. Appell a effectué récemment la même intégration par une méthode très rapide.

Nous avons donné nous-même [1] l'intégration complète, par ce procédé, du système vérifié par les polynomes d'Hermite déduits d'une exponentielle

$$
\mathrm{H}_{m,n}(x,y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)},
$$

où φ est une forme quadratique.

Signalons, comme applications que l'on pourrait faire de la méthode, l'intégration des équations hypergéométriques à deux variables, et du système vérifié par les polynomes

$$
\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\left[x^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}\right]
$$

extensions de ceux que nous avons considérés au n° 4.

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 167, 1918, p. 522.

[K¹9a]

SUR LE CERCLE DE MIQUEL;

PAR M. FRANÇOIS GIRAULT.

I. Étant données cinq droites, les foyers des cinq paraboles inscrites aux quadrilatères formés par ces cinq droites, prises quatre à quatre, sont, comme l'on sait, sur un cercle, dit *cercle de Miquel* du pentagone des cinq droites. Ce cercle est le lieu des foyers des *monofocales* de troisième classe inscrites au pentagone ([1]).

Le cercle de Miquel d'un pentagone est le lieu des points M *tels que la conique qui passe par les projections de* M *sur les côtés du pentagone passe aussi en* M.

On reconnaît en effet immédiatement que la podaire d'une monofocale de troisième classe par rapport à son foyer est une conique passant en ce point. Réciproquement, l'antipodaire d'une conique par rapport à l'un de ses points est une monofocale de troisième classe ayant son foyer au point considéré. Le lieu visé dans l'énoncé se confond avec celui des monofocales de troisième classe inscrites au pentagone, c'est-à-dire avec le cercle de Miquel de celui-ci.

II. On peut reconnaître l'existence de cinq cercles

([1]) *Voir* l'article de M. Henri LEBESGUE, *Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford* (*N. A.*, 1916, p. 481).

remarquables passant tous par un même point du cercle de Miquel d'un pentagone.

Cherchons, en effet, un quadrilatère étant donné, *quel est le lieu des points* M *tels que la conique qui passe par les projections de* M *sur les côtés du quadrilatère et par* M *soit une hyperbole équilatère* H.

L'antipodaire de H par rapport à M est, d'après la remarque faite ci-dessus, une monofocale de troisième classe G, ayant son foyer en M.

Les directions asymptotiques de G sont évidemment perpendiculaires aux directions asymptotiques de H, c'est-à-dire qu'elles sont rectangulaires. Le lieu cherché est donc celui des foyers des monofocales inscrites au quadrilatère donné, et telles que leurs directions asymptotiques soient rectangulaires.

Ce lieu est un cercle. En effet, I et J étant les points cycliques, il existe une infinité simple de monofocales de troisième classe inscrites au quadrilatère et tangentes à une droite isotrope donnée IM. Une telle monofocale est déterminée d'une façon unique, si l'on se donne l'un de ses points de contact avec la droite de l'infini, et l'autre point de contact est aussi déterminé d'une façon unique. Ces deux points de contact sont donc en relation homographique (et visiblement involutive) sur la droite de l'infini. Si l'on veut, en outre, que la monofocale ait ses directions asymptotiques rectangulaires, il faut que ces deux points de contact se correspondent dans l'involution qui admet I et J pour points doubles. Deux involutions sur une même droite n'ayant qu'un couple commun, on voit qu'il existe une seule monofocale de troisième classe, à directions asymptotiques rectangulaires, inscrite au quadrilatère et tangente à IM. On conclut immédia-

tement de là qu'il existe une correspondance homographique entre IM et JM, d'où il résulte que le lieu des foyers des monofocales envisagées est bien un cercle Γ.

Le cercle Γ *passe par le foyer* F *de la parabole inscrite au quadrilatère :* en effet, les projections de ce point sur les côtés étant en ligne droite, il existe une hyperbole équilatère (composée de deux droites rectangulaires) passant par ces points et par le point F.

Le cercle Γ *passe aussi par les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés avec les côtés du quadrilatère, pris trois à trois.* En effet, l'un de ces centres est l'orthocentre du triangle qui a pour sommets ses projections sur les côtés du triangle correspondant. Donc toute conique passant par ce centre et ces projections, en particulier celle qui passe aussi par la projection du même centre sur le quatrième côté du quadrilatère, est bien une hyperbole équilatère.

Je dirai que Γ est *le cercle des centres* du quadrilatère.

III. Considérons alors un pentagone, de côtés 1, 2, 3, 4, 5. Soient Γ_{1234} et Γ_{1235} les cercles des centres des deux quadrilatères (1, 2, 3, 4) et (1, 2, 3, 5). Ils ont en commun le centre du cercle circonscrit au triangle (1, 2, 3) et un autre point P, qui est tel qu'il existe une hyperbole équilatère passant par P et par les projections de ce point sur les cinq côtés du pentagone. P est donc sur le cercle de Miquel du pentagone (n° I), et l'on voit ainsi que P appartient encore aux cercles Γ_{1245}, Γ_{1345}, Γ_{2345} [1].

---

(1) On peut être conduit à se demander si, par analogie avec le théorème de Clifford, les six points P relatifs aux pentagones formés par les six côtés d'un hexagone, pris cinq à cinq, ne seraient pas sur un même cercle. J'ai reconnu, par l'examen d'un cas particulier, qu'il n'en est rien.

Ainsi, les cinq cercles des centres des quadrilatères obtenus en prenant quatre à quatre les côtés d'un pentagone se coupent en un point du cercle de Miquel de ce pentagone.

IV. On peut énoncer le corollaire suivant des propositions précédentes :

Étant donnés un triangle ABC *et un point* P, *soient* α, β, γ *les symétriques de* P *par rapport aux côtés de ce triangle. Les cercles* $BC\alpha$, $CA\beta$ *et* $AB\gamma$ *se coupent en un point du cercle* $\alpha\beta\gamma$.

Soient, en effet, Γ_a, Γ_b, Γ_c les trois cercles qui passent en P et qui ont pour centres respectifs A, B, C. Ces cercles se coupent deux à deux, indépendamment du point P, en α, β, γ. Menons par P deux droites quelconques 1 et 2. On reconnaît immédiatement, en faisant la figure, qu'il existe trois droites 3, 4 et 5 telles que les cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c soient circonscrits respectivement aux triangles (1, 2, 3), (1, 2, 4) et (1, 2, 5).

Les points α, β, γ sont les foyers respectifs des paraboles inscrites aux quadrilatères (1, 2, 4, 5), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 4). Ce cercle $\alpha\beta\gamma$ est donc le cercle de Miquel du pentagone (1, 2, 3, 4, 5). D'autre part, le cercle $BC\alpha$, par exemple, passant par les centres des cercles circonscrits aux triangles (1, 2, 4) et (1, 2, 5) et par le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère (1, 2, 4, 5), est le cercle des centres de ce quadrilatère. On a des faits analogues pour les cercles $CA\beta$ et $AB\gamma$, et l'on en conclut le théorème énoncé.

On peut ajouter que *les quatre cercles* $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, ABC *passent par un même point*. On a, en effet, le théorème général suivant :

Étant donnés six points A, B, C, α, β, γ, *si les*

quatre cercles $\alpha\beta_1\gamma_1$, $BC\alpha$, $CA\beta_1$, $AB\gamma_1$ *passent par un même point, il en est de même des quatre cercles* ABC, $A\beta_1\gamma_1$, $B\gamma_1\alpha$, $C\alpha\beta_1$.

En faisant une inversion par rapport au point de concours des quatre premiers cercles, on reconnaît, en effet, que cela revient au théorème classique sur le concours des quatre cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère.

[$O^2$6s]

SUR LES SURFACES TÉTRAÉDRALES SYMÉTRIQUES;

Par M. Cl. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

---

1. On désigne par $A_1B_1C_1D_1$ le tétraèdre de référence de la surface tétraédrale symétrique

$$Ax^m + By^m + Cz^m + Du^m = 0,$$

par M, μ un point de la surface et le plan tangent correspondant. Les tangentes asymptotiques m, m_1 au point M sont des génératrices de la quadrique polaire de M; cette quadrique (Q) est conjuguée au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ et deux tangentes conjuguées appartiennent à un même complexe tétraédral dont $A_1B_1C_1D_1$ est le tétraèdre fondamental. Les couples de tangentes conjuguées au point M forment une involution ayant pour éléments doubles les droites m, m_1. Le cône (M) du complexe tétraédral, déterminé par le rayon m, est donc tangent au plan μ le long de m. Par

suite, *les tangentes à une ligne asymptotique* (θ) *de la surface tétraédrale symétrique* Σ_m *appartiennent à un même complexe tétraédral* [1].

2. On considère la cubique gauche (G) circonscrite au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ et tangente au point M à la courbe (θ). Les courbes (θ) et (G) ont même plan osculateur μ au point M. Si ρ et ϖ, ρ_1 et ϖ_1 sont les rayons de courbure et de torsion au point M des courbes (θ) et (G), on a [2]

$$(1) \qquad 4\frac{\rho_1}{\rho} - 3\frac{\varpi_1}{\varpi} = 1.$$

La tangente m au point M de la cubique (G) rencontre les faces $B_1C_1D_1$, $A_1C_1D_1$ du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ aux points A, B. On désigne par α, β les plans mA_1, mB_1 : par a, b les traces des plans MA_1C_1, MB_1C_1 sur le plan osculateur μ. On a [3]

$$(2) \qquad \rho_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{MA.MB}{AB}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)},$$

$$(3) \qquad \varpi_1 = -\frac{1}{3}\,\frac{MA.MB}{AB}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}.$$

3. Les plans $\alpha \equiv mA_1$, $\beta \equiv mB_1$ sont tangents à la quadrique (Q) aux points A, B de la génératrice m. Si R'_1, R' désignent les rayons de courbure principaux

---

(1) Sophus Lie, *Ueber Complexe mit An Anwendung auf die Theorie partieller Differentiel-Gleichungen* (*Math. Ann.*, t. V).

(2) A. Demoulin, *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe* (*Comptes rendus*, Paris, 17 mai 1897).

(3) C. Servais, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. I, 1906, in-8°).

au point M de la quadrique (Q), on a [1]

$$(4) \qquad R'_1 R'_2 = - \frac{\overline{MA}^2 . \overline{MB}^2}{\overline{AB}^2} \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\sin^2(\mu\alpha).\sin^2(\mu\beta)}.$$

D'ailleurs, si R_1, R_2 désignent les rayons de courbure principaux de surface tétraédrale au point M, on a

$$(5) \qquad (m-1)^2 R_1 R_2 = R'_1 R'_2,$$

$$(6) \qquad \mathfrak{T} = \sqrt{-R_1 R_2}.$$

Des égalités (3), (4), (5), (6) on déduit

$$(7) \qquad \mathfrak{T} = \pm \frac{3}{m-1} \mathfrak{T}_1.$$

4. Dans le cas de la surface tétraédrale du troisième ordre,

$$A x^{-1} + B y^{-1} + C z^{-1} + D u^{-1} = 0,$$

la cubique gauche (G) appartient à la surface.

On a donc (Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 398) :

$$(8) \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} - 3 = -2 \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Les équations (1) et (8) ont pour systèmes de solutions

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = 1, \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = 1.$$

5. La relation (7) montre que pour une ligne asymptotique (θ) de la surface tétraédrale du troisième ordre la valeur du rapport $\mathfrak{T} : \mathfrak{T}_1$ est égale à $\frac{3}{2}$, Pour la sur-

---

(1) C. Servais, *Sur la courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1898, in-8°).

face Σ_m, on a donc

$$\mathfrak{T} = \frac{3}{1-m}\,\mathfrak{T}_1. \tag{9}$$

Des égalités (1) et (9) on déduit

$$\rho = \frac{4}{2-m}\,\rho_1. \tag{10}$$

Ainsi : *Un point M étant pris arbitrairement sur la ligne asymptotique (θ) d'une surface tétraédrale symétrique Σ_m, on considère la cubique gauche (G) tangente en M à la courbe (θ) et circonscrite au tétraèdre relatif à cette surface.*

1° *Le rapport des rayons de courbure ρ et ρ_1 des courbes (θ) et (G) au point M est en grandeur et en signe égal à*

$$\frac{4}{2-m}.$$

2° *Le rapport des rayons de torsion $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$ des courbes (θ) et (G) au point M est en grandeur et en signe égal à*

$$\frac{3}{1-m}.$$

6. Des formules (2), (3), (9), (10) on déduit

$$\rho = \frac{2}{m-2}\,\frac{\text{MA}.\text{MB}}{\text{AB}}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{m-1}\,\frac{\text{MA}.\text{MB}}{\text{AB}}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)},$$

formules qui déterminent les rayons de courbure et de torsion de la ligne asymptotique (θ) de la surface tétraédrale Σ_m en fonction d'éléments déterminés par le point M, la tangente m et le tétraèdre de symétrie.

7. *Une tangente asymptotique m au point* M *de*

la surface tétraédrale Σ_m *rencontre les faces du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *aux points* A, B, C, D. *L'homologue du point* M *dans l'involution* (AB, CD) *est situé sur la droite joignant les traces des arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *sur le plan tangent en* M *à la surface.*

En effet, la conique (μ) du complexe (T) (1) située dans le plan μ est tangente en M à la droite m et inscrite dans le quadrilatère $abcd$ section du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ par le plan μ. Les tangentes a et b, c et d définissent sur la conique (μ) une involution (I); en désignant par m' la conjuguée de m dans cette involution, les trois points ab, cd, $K \equiv mm'$ sont collinéaires. L'involution (I) détermine sur la droite m l'involution (AB, CD, MK).

8. *Si* m *et* μ *sont respectivement une tangente asymptotique et le plan tangent en un point* M *d'une surface tétraédrale* Σ_m, *le conjugué du plan* μ *dans l'involution définie par les couples de plans projetant de* m *les sommets* A_1 *et* B_1, C_1 *et* D_1 *du tétraèdre de symétrie coupe les arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *en deux points alignés sur le point* M.

En effet le cône (M) du complexe (T) est tangent au plan μ le long de la droite m. Les génératrices MA_1 et MB_1, MC_1 et MD_1 définissent sur le cône (M) une involution (I) dont le rayon polaire r s'appuie sur les droites A_1B_1, C_1D_1; le plan mr est l'homologue de μ dans l'involution projetant de m l'involution (I).

9. La tangente au point $M(x_1 y_1 z_1 u_1)$ de la courbe tétraédrale symétrique (C_m)

$$Ax^m + By^m + Cz^m + Du^m = 0,$$
$$A'x^m + B'y^m + C'z^m + D'u^m = 0$$

est l'axe du faisceau des plans tangents aux quadriques du faisceau

$$(A - kA')x_1^{m-2}x^2 + (B - kB')y_1^{m-2}y^2 + (C - kC')z_1^{m-2}z^2 + (D - kD')u_1^{m-2}u^2 = 0.$$

Cette droite m est une génératrice de la quadrique (Q_1) définie par une valeur k_1 convenablement choisie du paramètre k, et par suite m est une tangente asymptotique de la surface tétraédrale Σ_m représentée par l'équation

$$(A - k_1 A')x^m + (B - k_1 B')y^m + (C - k_1 C')z^m + (D - k_1 D')u^m = 0.$$

Le plan tangent en M à Σ_m est osculateur à la courbe (C_m) située sur Σ_m; sinon la courbure de cette courbe en un quelconque M de ses points serait nulle. Mais le plan est tangent au cône (M) du complexe tétraédral défini par le rayon m (1); donc :

Les tangentes à une courbe tétraédrale symétrique (C_m) appartiennent à un même complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental coïncide avec le tétraèdre de symétrie de la courbe [1].

La tangente m coupe la face $A_1B_1C_1$ du tétraèdre de symétrie $A_1B_1C_1D_1$ au point

$$x_2 = (BC')y_1^{m-1}z_1^{m-1}, \qquad y_2 = (CA')x_1^{m-1}z_1^{m-1},$$
$$z_2 = (AB')x_1^{m-1}y_1^{m-1}.$$

En exprimant que ce point appartient à la quadrique (Q_1), on détermine la valeur k_1 du paramètre k,

$$k_1 = \frac{A(BC')^2 y_1^m z_1^m + B(CA')^2 x_1^m z_1^m + C(AB')^2 x_1^m y_1^m}{A'(BC')^2 y_1^m z_1^m + B'(CA')^2 x_1^m z_1^m + C'(AB')^2 x_1^m y_1^m}.$$

---

[1] A. DEMOULIN, *Sur les courbes tétraédrales symétriques* (*Comptes rendus*, Paris, 1er avril 1892).

En désignant par Δ le dénominateur de k_1, on a

$$\Delta(A - k_1 A') = -(AB')(AC')(AD')x_1^m u_1^m,$$
$$\Delta(B - k_1 B') = -(BA')(BC')(BD')y_1^m u_1^m,$$
$$\Delta(C - k_1 C') = -(CA')(CB')(CD')z_1^m u_1^m,$$
$$\Delta(D - k_1 D') = -(DA')(DB')(DC')u_1^m u_1^m.$$

Il résulte de ces valeurs que les coordonnées du pôle du plan osculateur μ relativement à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0$$

sont données par les égalités

$$X_1 = (AB')(AC')(AD')x_1^{2m-1}, \qquad Y_1 = (BA')(BC')(BD')y_1^{2m-1},$$
$$Z_1 = (CA')(CB')(CD')z_1^{2m-1}, \qquad U_1 = (DA')(DB')(DC')u_1^{2m-1}.$$

Par suite, les équations de la polaire réciproque $(C'_{m'})$ de la courbe (C_m) sont :

$$A_1 x^{m'} + B_1 y^{m'} + C_1 z^{m'} + D' u^{m'} = 0,$$
$$A'_1 x^{m'} + B'_1 y^{m'} + C'_1 z^{m'} + D'_1 u^{m'} = 0,$$

en posant

$$A_1 = A : [(AB')(AC')(AD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$A'_1 = A' : [(AB')(AC')(AD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$B_1 = B : [(BA')(BC')(BD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$B'_1 = B' : [(BA')(BC')(BD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$C_1 = C : [(CA')(CB')(CD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$C'_1 = C' : [(CA')(CB')(CD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$D_1 = D : [(DA')(DB')(DC')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$D'_1 = D' : [(DA')(DB')(DC')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$m' = \frac{m}{2m-1}.$$

Ainsi : *La polaire réciproque* (C'_m) *d'une courbe*

tétraédrale symétrique (C_m) *est une courbe tétraédrale symétrique. Les exposants* m *et* m' *relatifs à ces deux courbes sont liés par la relation*

$$2mm' = m + m'.$$

10. Si l'on désigne par ρ_2 et ϖ_2, ρ et ϖ les rayons de courbure et de torsion au point de contact M de la courbe tétraédrale (C_m) et d'une ligne asymptotique de la surface Σ_m(9), on a (Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 398)

$$\frac{\varpi}{\varpi_2} - 3 = -2\frac{\rho_2}{\rho}. \tag{11}$$

Les égalités (9), (10), (11) donnent

$$\frac{3}{1-m}\frac{\varpi_1}{\varpi_2} - 3 = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{2-m}{2}. \tag{12}$$

On a aussi (2)

$$4\frac{\rho_1}{\rho_2} - 3\frac{\varpi_1}{\varpi_2} = 1. \tag{13}$$

Les équations (12) et (13) ont pour systèmes de solutions

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2}{1-m}, \qquad \frac{\varpi_2}{\varpi_1} = \frac{3}{1-2m},$$
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{4}{2-m}, \qquad \frac{\varpi_2}{\varpi_1} = \frac{3}{1-m}.$$

Dans le cas de la cubique gauche :

$$Ax^{-1} + By^{-1} + Cz^{-1} + Du^{-1} = 0,$$
$$A'x^{-1} + B'y^{-1} + C'z^{-1} + D'u^{-1} = 0,$$

on a nécessairement $\rho_2 = \rho_1$, $\varpi_2 = \varpi_1$, donc dans le cas général on a

$$\rho_2 = \frac{2}{1-m}\rho_1, \qquad \varpi_2 = \frac{3}{1-2m}\varpi_1. \tag{14}$$

Ainsi : *Un point* M *étant pris arbitrairement sur la courbe tétraédrale symétrique* (C_m), *on considère la cubique gauche* (G) *tangente en* M *à la courbe* (C_m) *et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie.*

1° *Le rapport des rayons de courbure* ρ_2 *et* ρ_1 *au point* M *de la courbe tétraédrale* (C_m) *et de la cubique* (G) *est égal à* (¹)

$$\frac{2}{1-m}.$$

2° *Le rapport des rayons de torsion* $\mathfrak{E}_2$ *et* $\mathfrak{E}_1$ *au point* M *de la courbe* (C_m) *et de la cubique* (G) *est égal à* (²)

$$\frac{3}{1-2m}.$$

11. On déduit des équations (2), (3), (14) que :

Les rayons de courbure et de torsion au point M *d'une courbe tétraédrale symétrique sont donnés par les formules*

$$\rho = \frac{1}{m-1}\,\frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2m-1}\,\frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)};$$

A, B *sont les traces de la tangente* m *au point* M *sur les faces* $B_1C_1D_1$, $A_1C_1D_1$ *du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *de la courbe tétraédrale;* a, b *les traces des plans* MA_1C_1, MB_1C_1 *sur le plan osculateur* μ; α, β *les plans* mA_1, mB_1.

(¹) V. Jamet, *Sur les surfaces et les courbes tétraédrales symétriques* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1887).

(²) A. Demoulin, *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe* (*Comptes rendus*, Paris, 17 mai 1897).

12. *La tangente m au point* M *d'une courbe tétraédrale symétrique* (C) *rencontre les faces du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *aux points* A, B, C, D. *L'homologue du point* M *dans l'involution* (AB, CD) *est situé sur la droite joignant les traces des arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1, *sur le plan osculateur* μ *au point* M.

Le conjugué du plan osculateur μ *dans l'involution définie par les couples de plans projetant de la tangente m les couples de sommets* A_1 *et* B_1, C_1 *et* D_1 *du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *coupe les arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *en deux points alignés sur le point* M.

Les démonstrations sont identiques à celles des n°s 7 et 8.

La première propriété donne la construction du plan osculateur μ en un point donné M de la courbe tétraédrale symétrique (C).

13. *Un point* M *étant pris arbitrairement sur la ligne asymptotique* (θ) *d'une surface tétraédrale symétrique* Σ_m *d'ordre m, on considère la courbe tétraédrale symétrique* (C) *tangente en ce point à la courbe* (θ), *ayant pour tétraèdre de symétrie celui de la surface* Σ_m *et pour exposant* $\frac{m}{2}$.

Les courbures et les torsions des deux courbes au point M *sont égales et de même signe.*

Car on a successivement pour les courbes (θ) et (C)

$$\rho = \frac{4}{2-m}\rho_1, \qquad \rho' = \frac{2}{1-\frac{m}{2}}\rho_1,$$

$$\varpi = \frac{3}{1-m}\varpi_1, \qquad \varpi' = \frac{3}{1-2\frac{m}{2}}\varpi_1,$$

ρ' et $\mathfrak{T}'$ étant les rayons de courbure et de torsion au point M de la courbe (C). On a donc

$$\rho = \rho', \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}'.$$

14. Les arêtes opposées A_1B_1, C_1D_1 du tétraèdre fondamental d'un complexe tétraédral (T) étant conjuguées dans un complexe linéaire (Δ), l'arête de rebroussement (C) d'une développable quelconque de la congruence [(T), (Δ)] jouit de la propriété suivante :

Un point M *étant pris arbitrairement sur la courbe* (C), *on considère la cubique gauche* (G) *tangente au point* M *à la courbe* (C) *et circonscrite au tétraèdre* $A_1B_1C_1D_1$.

Si ρ *et* ρ_1, $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}_1$ *sont les rayons de courbure et de torsion des courbes* (C) *et* (G) *au point* M, *on a*

$$\rho = 2\rho_1, \qquad \mathfrak{T} = 3\mathfrak{T}_1,$$

en grandeur et en signe.

En effet, en utilisant les notations (2), les plans β et α sont respectivement les plans focaux des points A et B dans le complexe linéaire Δ. Les tangentes à la courbe (C) appartiennent à ce complexe. On a donc [1]

$$(15) \qquad \mathfrak{T} = -\frac{\text{MA}.\text{MB}}{\text{AB}} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}.$$

Les égalités (3) et (15) donnent

$$(16) \qquad \mathfrak{T} = 3\mathfrak{T}_1.$$

Les tangentes à la courbe (C) appartiennent au complexe tétraédral (T); l'égalité (1) qui lui est applicable, combinée avec l'égalité (16), conduit à la relation

$$\rho = 2\rho_1.$$

---

(1) Cette formule est démontrée au n° 16.

Corollaire. — Le rayon de courbure de la courbe (C) au point M est donné par la formule

$$\rho = -\frac{\text{MA}.\text{MB}}{\text{AB}}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)}.$$

15. *La propriété* (10)

$$\mathfrak{T}_2 = \frac{3}{1-2m}\,\mathfrak{T}_1,$$

due à M. A. Demoulin, *peut se déduire par la théorie des polaires réciproques de la propriété*

$$\rho_2 = \frac{2}{1-m}\,\rho_1,$$

due à M. V. Jamet.

Les polaires réciproques $(C'_{m'})$ et (G') des courbes (C_m) et (G) (10), relativement à la quadrique

$$x^2+y^2+z^2+u^2=0,$$

sont tangentes au point M_1 correspondant de M. On désigne par ρ'_2 et ρ'_1 les rayons de courbure des courbes $(C'_{m'})$ et (G') au point M_1; on a [1]

$$(17)\qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho'_2}{\rho'_1}\,\frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1}.$$

La cubique (G') est osculatrice aux faces du tétraèdre de symétrie $A_1B_1C_1D_1$; si l'on désigne par ρ''_1 le rayon de courbure de la cubique tangente en M_1 à la cubique (G') et circonscrite à ce tétraèdre, on a

$$(18)\qquad \rho'_1 = 3\rho''_1.$$

et, d'après la propriété de M. Jamet,

$$(19)\qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2}{1-m},\qquad \frac{\rho'_2}{\rho''_1} = \frac{2}{1-m'}.$$

---

[1] C. Servais, *Sur la courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocite*, p. 29.

On a d'ailleurs (9)

$$2mm' = m + m'. \tag{20}$$

Les égalités (17), (18), (19), (20) donnent

$$\mathfrak{T}_2 = \frac{3}{1-2m}\,\mathfrak{T}_1.$$

Une remarque analogue est applicable aux propriétés (5) et (14).

16. Soient M, M' deux points infiniment voisins d'une courbe (C) dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire; A', B' deux points de la droite MM'; μ, μ' les plans osculateurs aux points M, M'; α', β' les plans focaux des points A', B'. On a

$$(\mathrm{MA'M'B'}) = (\mu\alpha'\mu'\beta'),$$

par suite

$$\lim \frac{\mathrm{MM'}}{\sin\mu\mu'} = \lim \frac{\mathrm{M'A'.MB'}}{\mathrm{A'B'}}\,\frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\mu'\alpha')\sin(\mu\beta')}$$

ou

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathrm{MA.MB}}{\mathrm{AB}}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}.$$

A et B sont deux points de la tangente au point M; α et β leurs plans focaux respectifs.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1837.

(1900, p. 96; 1917, p. 358.)

Les deux triangles ABC, A'B'C' *sont homologiques de deux manières :*

$$1^\circ \qquad \text{centre O} \left| \begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix} \right| \text{axe o},$$

$$2^\circ \qquad \text{centre O'} \left| \begin{matrix} A & B & C \\ C' & B' & A' \end{matrix} \right| \text{axe o'}.$$

Démontrer que si o *passe par* O′ : 1° o′ *passe par* O ; 2° *les six points* O, O′, *ba′*, *bc′*, *b′a*, *b′c sont les sommets d'un quadrilatère complet ;* 3° *les six droites* o, o′, BA′, BC′, B′A, B′C *sont les côtés d'un quadrangle complet ;* 4° *le triangle diagonal du quadrangle, qui a pour sommets* *ba′*, *bc′*, *b′a*, *b′c* *coïncide avec le trilatère diagonal du quadrilatère qui a pour côtés* BA′, BC′, B′A, B′C.

G. Gallucci.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Si l'on se place dans les conditions de l'hypothèse, on voit immédiatement que AC′, A′C se coupent en O′ sur o, o est la polaire de O par rapport à AC, A′C′. Projetons o suivant la droite de l'infini. Le quadrilatère ACA′C′ devient un parallélogramme dont les diagonales AA′, CC′ se coupent en O, BOB′ est parallèle à AC′, CA′ et l'on a $\overline{BO} = \overline{OB'}$.

1° O′ est à l'infini sur BOB′, et o′ est la parallèle à AC, A′C′ menée par O.

2° Le quadrilatère *ba′*, *bc′*, *b′a*, *b′c* est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O, *bc′* et *ba′* étant sur AC, *b′a* et *b′c* étant sur A′C′.

3° Le quadrilatère formé par les droites BA′, BC′, B′A, B′C est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O, deux sommets opposés sont B et B′, les deux autres sont sur o′.

4° Le quadrilatère formé par les droites A*cb′*, A′*bc′*, C*b′a*, C′*ba′* est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O, deux sommets opposés sont B et B′, les deux autres sont sur o′. Il suffit donc de revenir à la figure primitive pour avoir toutes les propriétés de l'énoncé.

Autre solution, par M. M. Faucheux.

1852.

(1900, p. 288)

On considère un système articulé composé de sept tiges rigides dont les quatre premières forment un quadrilatère gauche ABCD ; *les trois autres* ME, MF, MG *relient un point* M *à trois points* E, F, G, *appartenant respectivement aux tiges* AB, BC, CD *et fixes sur ces tiges.*

Les articulations qui existent aux points A, B, C, D, E, F, G, M *sont réalisées par des joints de Cardan.*

Démontrer que, pendant toutes les déformations dont le système est susceptible, le point M *reste à distance invariable d'un certain point* H *de la tige* DA, *fixe sur cette tige. On peut, de la sorte, adjoindre au système une huitième tige* MH *sans introduire de liaison nouvelle.*

RAOUL BRICARD.

SOLUTION

Par M. G. FONTENÉ.

Dans le volume des *Nouvelles Annales* pour 1904, page 105, j'ai fait connaître un système articulé gauche ayant deux paramètres de déformation, et j'ai indiqué comme cas particulier le système dont il s'agit ici. Les quatre points E, F, G, H sont dans un même plan; et si l'on pose

$$AB = a, \qquad BC = b, \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$
$$\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{BF}{FC} = \frac{n}{p}, \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$
$$ME = \alpha, \qquad MF = \beta, \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$

on a

$$\alpha^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) - \beta^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) + \ldots - \ldots + \left(\frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \ldots - \ldots\right) = 0.$$

Autre solution, par M. M. FAUCHEUX.

1884.

(1900, p. 572; 1917, p. 398.)

Dans le plan, une courbe de troisième classe C *et une cubique* C' *peuvent se correspondre ainsi : l'un des trois système de coniques* S' *qui admettent* C' *pour Jacobienne ordinaire se compose des coniques circonscrites à l'un des trois systèmes de quadrangles circonscrits à* C; *et l'un des trois systèmes de coniques* S *qui admettent* C *pour Jacobienne tangentielle se compose des coniques inscrites dans l'un des trois systèmes de quadrilatères inscrits à* C'. *On peut se donner* C' *par exemple et il y a alors trois courbes* C.

G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. HENRI DUMAS.

Un système de coniques S' admettant C' pour Jacobienne est le réseau des coniques polaires de tous les points du plan par rapport à une cubique Γ' admettant C' pour Hessienne.

Le faisceau des coniques circonscrites à un quadrangle circonscrit à C fait partie du réseau admettant C pour Cayleyenne, puisque les trois coniques décomposées de ce faisceau sont formées chacune de deux tangentes à C. La première partie de l'énoncé revient donc à dire que C est la Cayleyenne d'une cubique Γ' admettant C' pour Hessienne.

Si l'on se donne C', il y a trois cubiques Γ' l'admettant pour Hessienne et chacune de ces trois cubiques admet une Cayleyenne C. A une courbe C' correspondent donc trois courbes C.

Les propriétés relatives aux courbes de troisième classe et aux réseaux tangentiels de coniques donnent les faits corrélatifs des précédents [1].

QUESTIONS.

2428. On sait que les pieds M, M', M'', M''' des normales abaissées d'un point P sur une conique Δ sont situés sur une hyperbole équilatère Δ' qui passe par P et par le centre C de Δ. Étant données l'équation de Δ' sous la forme $xy = K^2$ et les coordonnées des points M, M', M'' de cette courbe, trouver les relations qui lient : 1° les abscisses des points M, M', M'', M''' ; 2° celles des points M, M', M'', P ; 3° celles des points M, M'', M''', C.

J. NEUBERG.

---

[1] Il resterait à montrer que, si une courbe C est la Cayleyenne d'une cubique Γ' admettant C' pour Hessienne, la courbe C' est la Cayleyenne tangentielle d'une courbe de troisième classe Γ admettant C pour Hessienne tangentielle. N. D. L. R.

2429. Soient C le centre et p une asymptote d'une hyperbole équilatère variable qui passe par deux points donnés A et B. Lorsque C parcourt une droite donnée c, quelle est l'enveloppe de p? Lorsque p tourne autour d'un point donné P, quel est le lieu de C? J. Neuberg.

2430. Soient M et M' deux points inverses par rapport à un triangle ABC, X'Y'Z' le triangle podaire de M'. P étant un point quelconque du plan, les perpendiculaires abaissées de M sur PX', PY', PZ' rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB en trois points α, β, γ en ligne droite. La droite $\alpha\beta\gamma$ est perpendiculaire à PM'. C. Convers.

2431. Étant donnés deux triangles homologiques et dont les côtés sont deux à deux perpendiculaires : 1° leur centre d'homologie est l'un des points d'intersection de leurs cercles circonscrits; 2° les droites de Simpson de l'autre point commum à ces deux cercles par rapport aux deux triangles sont rectangulaires et se coupent sur l'axe d'homologie.

N. Obrechkoff.

2432. Sur les côtés d'un triangle ABC on construit trois rectangles, à diagonales égales, dont les centres sont D, E, F. Soient D', E', F' les symétriques de ces points par rapport à BC, CA, AB. Montrer que :

1° Les centres θ, ω, ω' des cercles circonscrits aux triangles ABC, DEF, D'E'F' sont en ligne droite;

2° Les cercles podaires de ω et ω', par rapport à ABC, sont tangents au cercle des neufs points de ce triangle.

V. Thébault.

2433. Étant données quatre droites quelconques, dans le plan, on peut leur en associer une cinquième, telle que les dix segments dont chacun a pour extrémités le point de rencontre de deux de ces droites et l'orthocentre du triangle formé par es trois autres aient même point milieu.

Les côtés d'un pentagone régulier forment un tel système de cinq droites. R. B.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XIX, 4e SÉRIE, 1919.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

Analyse mathématique.

Géométrie.

Mathématiques appliquées.

Questions d'examens et de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XIX, 4e SÉRIE, 1919.)

59710-20 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55

